Aufgabenblatt 12, Abgabe: 12. 07. 2010

Aufgabe 36. Der Doppler-Effekt (4 Punkte)

Ein Polizist behauptet, ein Autofahrer sei mit überhöhter Geschwindigkeit durch Rot ($\lambda = 650$ nm) gefahren. Der Autofahrer behauptet, er habe Grün ($\lambda = 530$ nm) gesehen. Nehmen wir an, beide haben Recht.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Autofahrers beim Blick (in Fahrtrichtung) auf die Ampel.

Nehmen wir nun an, der Autofahrer sieht die Ampel in einer Seitenstraße und zwar aus einer Richtung, die genau senkrecht auf seiner Geschwindigkeitsrichtung steht. Obwohl die Ampel grün ist, sieht der Autofahrer dieses Mal Rot.

(b) Bestimmen Sie wieder die Geschwindigkeit des Autofahrers beim Blick auf die Ampel.

Aufgabe 37. Der Lorentz-Boost und elektromagnetische Felder (5 Punkte)

Wie aus der Vorlesung bekannt, kann der (antisymmetrische) elektromagnetische Feldstärketensor durch die elektromagnetischen Felder ausgedrückt werden: $F^{i0} = E_i$, $F^{ij} = -c\varepsilon_{ijk}B_k$. Als echter Tensor wird er wie folgt transformiert:

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}$$

Wir betrachten nun die explizite Form des Lorentz-Boosts:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbb{1}_3 + (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie explizit das Transformationsverhalten der **E**- und **B**-Felder unter dieser Lorentz-Transformation und leiten Sie folgende Ausdrücke ab:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) - (\gamma-1)(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{E})\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) - (\gamma-1)(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{B})\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie zusätzlich für die Komponenten:

$$\begin{aligned} E'_{\|} &= E_{\|} & \qquad B'_{\|} &= B_{\|} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_{\perp} & \qquad \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}_{\perp} \end{aligned}$$

Aufgabe 38. Relativistisches geladenes Teilchen im elektrischen Feld (7 Punkte)

Wir betrachten die Dynamik eines geladenen, relativistischen Teilchens (mit der Ladung q und der Ruhemasse m_0) in einem homogenen statischen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_1$. Die Wirkung dieses Problems ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}\right)^2} - q\Phi(\mathbf{x}) \right] \quad , \quad \Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{x}\,.$$

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion und entsprechende Lagrange-Gleichungen an. Zeigen Sie für den kinetischen Impuls $\boldsymbol{\pi}(t) = m(t)\mathbf{u}(t)$ (mit $\mathbf{u} \equiv \dot{\mathbf{x}}$ und $m(t) = \gamma_u(t)m_0$):

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q\mathbf{E} \, .$$

Wir wählen den Anfangsimpuls in $\hat{\mathbf{e}}_1$-Richtung, $\boldsymbol{\pi}(t=0) = \pi_0\hat{\mathbf{e}}_1$, und $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{0}$.

(b) Geben Sie $\boldsymbol{\pi}(t)$ und die intrinsische Energie $\mathcal{E}(t)$ des Teilchens (d.h. die Gesamtenergie ohne die potentielle Energie im Feld) an.

(c) Finden Sie die explizite Zeitabhängigkeit der Masse $m(t)$ und der Teilchenkoordinate $x_1(t)$.

Aufgabe 39. Relativistisches Teilchen im Magnetfeld (4 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Ruhemasse m_0 und der Ladung q in einem räumlich homogenen, zeitunabhängigen Magnetfeld $\mathbf{B}$. Der kinetische Impuls $\boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$ und die Energie $\mathcal{E} = \gamma_u m_0 c^2$ des Teilchens erfüllen die Bewegungsgleichungen $\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ und $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$. Die Anfangsbedingung lautet $\mathbf{u}(0) \equiv \mathbf{u}_0$ und $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie $\mathbf{x}(t)$.