Aufgabenblatt 1, Abgabe: 27. 10. 2008

Aufgabe 1. Vektorrechnung und Kraftfelder (7 Punkte)

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ seien beliebige, feste Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und α, $\lambda \in \mathbb{R}$ seien konstante Parameter.

(a) Geben Sie die Lösungsmengen für die Gleichungen

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \lambda \tag{1}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

an und interpretieren Sie sie geometrisch!

(b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Kraftfelder konservativ sind und bestimmen Sie ggf. das zugehörige Potential $V(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} \tag{3}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \alpha \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \tag{4}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \alpha \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \exp(-\lambda|\mathbf{x}|) \tag{5}$$

Aufgabe 2. Lorentz-Transformationen und die Addition von Geschwindigkeiten (6 Punkte)

Betrachten Sie zwei Inertialsysteme K und K', wobei K' die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zu K hat. Wir wählen die x_1- und x'_1-Achsen von K und K' parallel zur Geschwindigkeit: $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}'_1 = \hat{\mathbf{v}}$. Die Koordinaten in K und K' sind in diesem Fall durch eine Lorentz-Transformation der Form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}_\perp \; ,$$

miteinander verknüpft, wobei $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta \equiv \frac{v}{c}$ gilt.

(a) Verwenden Sie die Parametrisierung $\beta = \tanh(\phi)$ mit der sogenannten “Rapidität” $\phi \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass die Lorentz-Transformation („Boost“) auch als

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix} \equiv \Lambda_{\mathrm{B}}(\phi)$$

geschrieben werden kann.

Betrachten Sie nun *drei* Inertialsysteme K, K', K'' mit $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}(K', K) = v_1\hat{\mathbf{e}}_1$ und $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}(K'', K') = v_2\hat{\mathbf{e}}_1$. Für zunächst unbekanntes v_{1+2} gilt also auch $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}(K'', K) = v_{1+2}\hat{\mathbf{e}}_1$.

(b) Zeigen Sie: $\Lambda_{\mathrm{B}}(\phi_1)\Lambda_{\mathrm{B}}(\phi_2) = \Lambda_{\mathrm{B}}(\phi_1 + \phi_2)$; leiten Sie hieraus das Additionsgesetz für parallel ausgerichtete Geschwindigkeiten $v_{1+2} = (v_1 + v_2)/(1 + v_1v_2/c^2)$ ab.

Hinweis: Verwenden Sie bei Bedarf: $\tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh(\phi_1)+\tanh(\phi_2)}{1+\tanh(\phi_1)\tanh(\phi_2)}$.

Aufgabe 3. Der dreidimensionale harmonische Oszillator (7 Punkte)

Betrachten Sie zwei Punktteilchen mit den Massen m_1 und m_2 und den Koordinaten $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$, deren Zweiteilchenwechselwirkung aus dem Potential $V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2$ abgeleitet werden kann. Hierbei ist $x \equiv |\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_{21}$ und $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$; wir untersuchen dieses Problem im Schwerpunktsystem. Die Gesamtenergie $E^{(S)}$ und der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}^{(S)} = L\hat{\mathbf{e}}_3$ sind bekanntlich erhalten, und man kann die Bewegung in der $\hat{\mathbf{e}}_1$-$\hat{\mathbf{e}}_2$-Ebene durch zwei Amplituden und zwei Phasen charakterisieren: $x_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ und $x_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

(a) Zeigen Sie: $E^{(S)} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 \left(a_1^2 + a_2^2\right) \quad , \quad L = -\mu\omega a_1 a_2 \sin(\delta)$ mit $\delta \equiv \varphi_2 - \varphi_1$.

(b) Bestimmen Sie die große und die kleine Halbachse der durch $(x_1(t), x_2(t))$ beschriebenen Ellipse als Funktion von $E^{(S)}$ und L. Wie lautet also die Normalform dieser Ellipse?

(c) Es sei nun als Anfangsbedingung gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = -\frac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Bestimmen Sie die zugehörige Normalform.