Aufgabenblatt 5, Abgabe: 24. 11. 2008

**Aufgabe 14. Pendel und Feder** (7 Punkte)

Wir betrachten das folgende zweidimensionale Schwingungsproblem zweier gekoppelter Punktmassen in der $x_1 - x_3$-Ebene: Das erste Teilchen (mit der Masse $m_1$ und den Koordinaten $\mathbf{x}_1$) kann sich nur (reibungslos) entlang der $\hat{\mathbf{e}}_1$-Achse bewegen und ist mittels einer Feder (mit der Federkonstanten $k$ und der Ruhelänge $\sqrt{2}h$) mit dem Punkte $h\hat{\mathbf{e}}_3$ verbunden. Das zweite Teilchen (mit der Masse $m_2$ und den Koordinaten $\mathbf{x}_2$) ist mittels eines starren masselosen Stabs der Länge $l$ mit dem ersten Teilchen verbunden und kann (reibungslos) um $\mathbf{x}_1$ pendeln. Das System befindet sich im konstanten Schwerkraftfeld $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$. Offensichtlich sind sowohl $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (h\hat{\mathbf{e}}_1, h\hat{\mathbf{e}}_1 - l\hat{\mathbf{e}}_3)$ als auch $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (-h\hat{\mathbf{e}}_1, -h\hat{\mathbf{e}}_1 - l\hat{\mathbf{e}}_3)$ mögliche Gleichgewichtslagen des Systems. Wir konzentrieren uns auf die erste der beiden Gleichgewichtslagen und definieren die verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ durch:

$$\mathbf{x}_1 = (h + q_1)\hat{\mathbf{e}}_1 \quad , \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + l\left[\sin(q_2/l)\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos(q_2/l)\hat{\mathbf{e}}_3\right] \quad .$$

(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$.

(b) Vernachlässigen Sie alle Beiträge zur Lagrange-Funktion von höherer als quadratischer Ordnung in den verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ und zeigen Sie, dass die entsprechende Lagrange-Gleichung der zweiten Art auf die Form

$$\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{m_1}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}k & -m_2\omega_0^2 \\ -\frac{1}{2}k & (m_1+m_2)\omega_0^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad , \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l} \tag{1}$$

gebracht werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass das Schwingungsproblem (1) im Allgemeinen zwei unterschiedliche reelle Eigenfrequenzen $\omega_1$ und $\omega_2$ mit $\omega_{1,2} \neq 0$ hat.

Wir betrachten zur Illustration den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$ und $k = 3m\omega_0^2$.

(d) Bestimmen Sie die Eigenschwingungen von (1) für diesen Spezialfall und skizzieren Sie diese. Sind die Eigenschwingungen orthogonal? Müssen sie dies sein?

**Aufgabe 15. Zwei Massen am Faden** (7 Punkte)

Wir betrachten zwei Massenpunkte, die durch einen massenlosen Faden mit der konstanten Gesamtlänge $l$ verbunden sind. Der erste Massenpunkt [mit der Masse $m_1$ und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_1(t)$] kann an dem Faden mit der variierenden Teillänge $l_1$ auf der $x_1$-$x_2$–Ebene rotieren. Der Faden führt von $m_1$ durch ein Loch in der $x_1$-$x_2$–Ebene zu dem zweiten Massenpunkt [mit der Masse $m_2$ und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_2(t)$], wobei die Masse $m_2$ an dem straff gespannten Faden mit der ebenfalls veränderlichen Teillänge $l_2 = l - l_1$ hängt. Diese Anordnung kann im Schwerkraftfeld $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$ je nach den Werten, die Winkelgeschwindigkeit bei der Rotation von $m_1$ auf der Ebene annimmt, nach oben oder nach unten rutschen. Dabei soll sich die Masse $m_2$ nur vertikal bewegen können, Reibung soll an keiner Stelle auftreten.

(a) Klassifizieren Sie dieses System nach Gesichtspunkten: skleronom oder rheonom, holonom oder nicht holonom, konservativ oder nicht konservativ.

Wir bezeichnen den Winkel zwischen dem Vektor $\mathbf{x}_1$ und der $\hat{\mathbf{e}}_1$-Richtung als $\varphi$:

$$\mathbf{x}_1 = l_1[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2] \ , \ \mathbf{x}_2 = -l_2\hat{\mathbf{e}}_3$$

und wählen nun $\varphi$ und $l_2$ als verallgemeinerte Koordinaten.

(b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(\varphi, l_2, \dot{\varphi}, \dot{l}_2, t)$ und die entsprechenden Lagrange-Gleichungen.

(c) Zeigen Sie anhand der Lagrange-Gleichungen explizit, dass die Gesamtenergie und der generalisierte Impuls $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ erhalten bleiben.

(d) Bestimmen Sie den Gleichgewichtszustand des Systems und die Bedingungen dafür, dass sich der Faden nach oben bewegt.

**Aufgabe 16. Eine Rolle und ein Seil** (6 Punkte)

Betrachten Sie zwei Massenpunkte (mit den Massen $m_1$ und $m_2$ und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$), die an den Endpunkten eines Seils der Länge $l$ befestigt sind. Das Seil kann sich im (konstanten) Schwerkraftfeld $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$ über eine Rolle (mit dem Radius $R$) bewegen, die sich hierbei reibungslos um die $\hat{\mathbf{e}}_1$-Achse dreht. Wir wählen verallgemeinerte Koordinaten $z_1$ und $z_2$, die durch

$$\mathbf{x}_1 = -R\hat{\mathbf{e}}_2 + z_1\hat{\mathbf{e}}_3 \quad , \quad \mathbf{x}_2 = R\hat{\mathbf{e}}_2 + z_2\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (z_{1,2} < 0)$$

definiert sind und die Zwangsbedingung $f(z_1, z_2) \equiv z_1 + z_2 + l - \pi R = 0$ erfüllen. Zur Zeit $t = 0$ soll $z_1(0) = z_0$ und $\dot{z}_1(0) = \dot{z}_0$ gelten. Wir nehmen an, dass das Seil so lang ist und die Anfangsbedingungen so gewählt sind, dass das Seil während unserer Überlegungen nicht von der Rolle rutscht.

(a) Geben Sie die Lagrange-Gleichung der *ersten* Art an und bestimmen Sie die vom Seil auf die Massenpunkte ausgeübten Zwangskräfte für den Fall, dass das Seil als masselos angesehen werden kann.

Eliminieren Sie nun die Zwangsbedingung $f(z_1, z_2) = 0$, indem Sie $z_1$ als einzige verallgemeinerte Koordinate wählen.

(b) Geben Sie die Lagrange-Gleichung der *zweiten* Art an für den Fall, dass das Seil eine homogene Massendichte $\rho$ pro Längeneinheit besitzt, und lösen Sie diese.