Aufgabenblatt 7, Abgabe: 08. 12. 2008

Aufgabe 21. Ein Hantelmolekül schwingt über die Kreuzung (9 Punkte)

Betrachten Sie ein "Hantelmolekül", bestehend aus zwei "Atomen" der Masse m, die durch einen starren masselosen Stab der Länge l miteinander verbunden sind. Eines der beiden Atome hat die Koordinaten $\mathbf{x}_1$ und kann sich nur (reibungslos) entlang der $\hat{\mathbf{e}}_1$-Achse bewegen, das andere hat die Koordinaten $\mathbf{x}_2$ und kann sich nur (reibungslos) entlang der $\hat{\mathbf{e}}_2$-Achse bewegen. Das System wird also in kartesischen Koordinaten durch die Lagrange-Funktion $L(\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2) = T(\dot{\mathbf{x}}_1, \dot{\mathbf{x}}_2) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \dot{\mathbf{x}}_2^2)$ und die drei skleronomen holonomen Zwangsbedingungen

$$f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 - l^2\right] = 0 \quad , \quad f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \mathbf{x}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 0 \quad , \quad f_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \mathbf{x}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = 0$$

charakterisiert.

(a) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen der ersten Art in kartesischen Koordinaten an und zeigen Sie, dass die vom Stab auf die erste Masse ausgeübte Zwangskraft entlang des Stabs gerichtet ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen der ersten Art, dass die Energie $E = T(\dot{\mathbf{x}}_{\phi 1}, \dot{\mathbf{x}}_{\phi 2})$ des Systems erhalten ist.

Eliminieren Sie nun die zweite und dritte Zwangsbedingung, indem Sie verallgemeinerte Koordinaten (q_1, q_2) einführen, die durch $\mathbf{x}_1 \equiv q_1\hat{\mathbf{e}}_1$ und $\mathbf{x}_2 \equiv q_2\hat{\mathbf{e}}_2$ definiert sind.

(c) Geben Sie die Lagrange-Gleichungen der ersten Art in den verallgemeinerten Koordinaten (q_1, q_2) an und lösen Sie diese.

(d) Zeigen Sie durch explizite Berechnung, dass die in (a) betrachtete, vom Stab auf die *erste* Masse ausgeübte Zwangskraft Arbeit verrichtet und dass die *Gesamt*arbeit, die von den vom Stab ausgeübten Kräften verrichtet wird, Null ist.

(e) Skizzieren Sie die Bewegung des Hantelmoleküls und seines Schwerpunkts als Funktion der Zeit. Erkennen Sie eine zyklische Koordinate? Wie hätte man mit deren Hilfe die Dynamik des Systems einfacher bestimmen können?

Aufgabe 22. Erhaltungsgrößen (5 Punkte)

Betrachten Sie ein geladenes Teilchen im magnetischen Feld. Bestimmen Sie die Erhaltungsgrößen des Systems falls

1. $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{B} \times \mathbf{x}\right]$
2. $A_1 = A_3 = 0\,,\ A_3 = x_1 B$
3. $\mathbf{A} = \frac{[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{x}]}{|\mathbf{x}|^3}$

wobei $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\mu}$ und B konstant sind.

Aufgabe 23. Legendre-Transformation (6 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte $G(v)$ der nachfolgenden Funktionen $F(u)$; skizzieren Sie jeweils $F(u)$ und $G(v)$; geben Sie stets an, auf welchem Intervall der reellen Achse $G(v)$ definiert ist:

1. $F(u) = \cosh(u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad .$
2. $F(u) = |u| + \frac{1}{2}u^2 \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad .$
3. $F(u) = -\ln(1 - u^2) \quad , \quad -1 < u < 1 \quad .$

Führen Sie in den Fällen 1-2 auch die Rücktransformation durch und berechnen Sie im Fall 3 die Asymptotik von $G(v)$ für $v \to 0$. **Hinweis:** Allgemeiner als in der Vorlesung behandelt lässt sich strikte Konvexität auch für nicht stetig differenzierbare Funktionen $F(u)$ durch folgende Bedingung definieren: $F(\lambda u_1 + (1 - \lambda u_2)) < \lambda F(u_1) + (1 - \lambda)F(u_2)$ für $0 < \lambda < 1$.