

Aufgabe 24. Das schwingende Dreieck (8 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Wir betrachten drei Massenpunkte (jeweils der Masse m) in der $x_1 - x_2$ -Ebene, die durch drei ideale Federn (jeweils mit der Ruhelänge ℓ und der Federkonstanten $m\omega_0^2$) miteinander verbunden sind. Die Bewegung des k -ten Massenpunkts ($k = 1, 2, 3$) ist insofern eingeschränkt, als er sich nur entlang der Halbachse $\lambda \hat{\mathbf{a}}_k$ mit $\lambda \geq 0$ und

$$\hat{\mathbf{a}}_k \equiv \begin{pmatrix} \cos \left[\frac{2\pi}{3} \left(k - \frac{3}{4} \right) \right] \\ \sin \left[\frac{2\pi}{3} \left(k - \frac{3}{4} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$

bewegen kann; diese Bewegung erfolgt reibungslos. Wir bezeichnen die kartesischen Koordinaten des k -ten Teilchens in der $x_1 - x_2$ -Ebene als $\mathbf{x}_k(t) = (x_{k1}(t), x_{k2}(t))$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_k^{(0)} = \frac{\ell}{\sqrt{3}} \hat{\mathbf{a}}_k$ ($k = 1, 2, 3$) eine mögliche Gleichgewichtslage der Teilchen darstellt.

Wir führen nun verallgemeinerte Koordinaten $(q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{q}$ mittels $\mathbf{x}_k(t) \equiv \mathbf{x}_k^{(0)} [1 + q_k(t)]$ ein und entwickeln den Zustand $\{\mathbf{x}_k(t)\}$ um diese Gleichgewichtslage.

- (b) Zeigen Sie für $k \neq l$: $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l| = \ell \left[1 + \frac{1}{2}(q_k + q_l) + \mathcal{O}(|\mathbf{q}|^2) \right]$.
- (c) Zeigen Sie, dass in der Näherung für *kleine Schwingungen* um die Gleichgewichtslage für die Lagrange-Funktion gilt:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{6} m \ell^2 \left[\dot{\mathbf{q}}^2 - \frac{3}{2} \omega_0^2 (\mathbf{q}^2 + q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1) \right] .$$

- (d) Geben Sie für den Fall kleiner Schwingungen die Lagrange-Gleichungen an.
- (e) **Bonuspunkte:** Bestimmen Sie die Normalschwingungen und Eigenfrequenzen des Systems durch Bildung geeigneter Linearkombinationen der Lagrange-Gleichungen. Skizzieren Sie die Normalschwingungen.

Aufgabe 25. Der Drehimpuls (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ relativ zu einem Inertialsystem. Das Teilchen befindet sich in einem sphärisch symmetrischen Potential $V(x)$, wobei $x \equiv |\mathbf{x}|$ definiert wird. Es wird nun eine Transformation auf sphärische Koordinaten (x, ϑ, φ) durchgeführt.

- (a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(x, \vartheta, \varphi, \dot{x}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ des Teilchens und die entsprechenden verallgemeinerten Impulse an.
- (b) Geben Sie die Hamilton-Funktion H des Teilchens als Funktion von (x, ϑ, φ) und den zu (x, ϑ, φ) konjugierten Impulsen $(p_x, p_\vartheta, p_\varphi)$ an.

Aus der Newton'schen Mechanik wissen wir bereits, dass der Drehimpuls \mathbf{L} des Teilchens und daher auch \mathbf{L}^2 erhalten sind und deshalb eine zentrale Rolle bei der Beschreibung der Dynamik des Teilchens spielen.

- (c) Bestimmen Sie \mathbf{L} und \mathbf{L}^2 als Funktion von (x, ϑ, φ) und $(p_x, p_\vartheta, p_\varphi)$.
- (d) Bestimmen Sie H als Funktion der Variablen x, p_x und \mathbf{L}^2 .

Aufgabe 26. Energieerhaltung? (6 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das Jacobi-Integral und die Hamilton-Funktion erhalten sind und die Energie des Systems darstellen, falls $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ gilt und die eventuellen Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeitvariablen abhängen.

Zur Illustration betrachten wir einen Massenpunkt (Masse m), der reibungslos entlang des Kreisrandes $\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}| = l\}$ gleiten kann, wobei $\mathbf{X}(t)$ und l den Mittelpunkt und den Radius des Kreises darstellen. Der Kreis soll sich in der $\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2$ -Ebene bewegen, so dass $\mathbf{X} = X_1\hat{\mathbf{e}}_1 + X_2\hat{\mathbf{e}}_2$ und $\mathbf{x} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2$ gilt; die Bewegung $\mathbf{X}(t)$ wird vorgegeben. Man kann die Bewegung des Massenpunkts also mit Hilfe einer einzelnen verallgemeinerten Koordinate φ beschreiben: $\mathbf{x}(\varphi, t) = \mathbf{X}(t) + l[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2]$.

- (a) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die Energie E des Massenpunkts an.
- (b) Wählen Sie nun $L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2$ mit $\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{x}(\varphi, t)$, und leiten Sie aus dieser Lagrange-Funktion Ausdrücke für den verallgemeinerten Impuls und die Hamilton-Funktion ab.
- (c) Wie muss man $\mathbf{X}(t)$ wählen, damit die Hamilton-Funktion für alle möglichen physikalischen Bahnen erhalten ist? Ist dann auch die Energie erhalten? Falls nein: Erklären Sie dies. Falls ja: Hätten Sie dies auch aufgrund allgemeiner Überlegungen vorhersehen können?