Aufgabenblatt 8, Abgabe: 15. 12. 2008

Aufgabe 24. Das schwingende Dreieck (8 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Wir betrachten drei Massenpunkte (jeweils der Masse m) in der $x_1 - x_2$-Ebene, die durch drei ideale Federn (jeweils mit der Ruhelänge ℓ und der Federkonstanten $m\omega_0^2$) miteinander verbunden sind. Die Bewegung des k-ten Massenpunkts ($k = 1, 2, 3$) ist insofern eingeschränkt, als er sich nur entlang der Halbachse $\lambda\hat{\mathbf{a}}_k$ mit $\lambda \geq 0$ und

$$\hat{\mathbf{a}}_k \equiv \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{2\pi}{3}\left(k - \frac{3}{4}\right)\right] \\ \sin\left[\frac{2\pi}{3}\left(k - \frac{3}{4}\right)\right] \end{pmatrix} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

bewegen kann; diese Bewegung erfolgt reibungslos. Wir bezeichnen die kartesischen Koordinaten des k-ten Teilchens in der $x_1 - x_2$-Ebene als $\mathbf{x}_k(t) = (x_{k1}(t), x_{k2}(t))$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_k^{(0)} = \frac{\ell}{\sqrt{3}}\,\hat{\mathbf{a}}_k$ ($k = 1, 2, 3$) eine mögliche Gleichgewichtslage der Teilchen darstellt.

Wir führen nun verallgemeinerte Koordinaten $(q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{q}$ mittels $\mathbf{x}_k(t) \equiv \mathbf{x}_k^{(0)}[1 + q_k(t)]$ ein und entwickeln den Zustand $\{\mathbf{x}_k(t)\}$ um diese Gleichgewichtslage.

(b) Zeigen Sie für $k \neq l$: $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l| = \ell\left[1 + \frac{1}{2}(q_k + q_l) + \mathcal{O}(|\mathbf{q}|^2)\right]$.

(c) Zeigen Sie, dass in der Näherung für *kleine Schwingungen* um die Gleichgewichtslage für die Lagrange-Funktion gilt:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tfrac{1}{6}m\ell^2\left[\dot{\mathbf{q}}^2 - \tfrac{3}{2}\omega_0^2(\mathbf{q}^2 + q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1)\right] .$$

(d) Geben Sie für den Fall kleiner Schwingungen die Lagrange-Gleichungen an.

(e) **Bonuspunkte:** Bestimmen Sie die Normalschwingungen und Eigenfrequenzen des Systems durch Bildung geeigneter Linearkombinationen der Lagrange-Gleichungen. Skizzieren Sie die Normalschwingungen.

Aufgabe 25. Der Drehimpuls (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ relativ zu einem Inertialsystem. Das Teilchen befindet sich in einem sphärisch symmetrischen Potential $V(x)$, wobei $x \equiv |\mathbf{x}|$ definiert wird. Es wird nun eine Transformation auf sphärische Koordinaten (x, ϑ, φ) durchgeführt.

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(x, \vartheta, \varphi, \dot{x}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ des Teilchens und die entsprechenden verallgemeinerten Impulse an.

(b) Geben Sie die Hamilton-Funktion H des Teilchens als Funktion von (x, ϑ, φ) und den zu (x, ϑ, φ) konjugierten Impulsen $(p_x, p_\vartheta, p_\varphi)$ an.

Aus der Newton'schen Mechanik wissen wir bereits, dass der Drehimpuls $\mathbf{L}$ des Teilchens und daher auch $\mathbf{L}^2$ erhalten sind und deshalb eine zentrale Rolle bei der Beschreibung der Dynamik des Teilchens spielen.

(c) Bestimmen Sie $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}^2$ als Funktion von (x, ϑ, φ) und $(p_x, p_\vartheta, p_\varphi)$.

(d) Bestimmen Sie H als Funktion der Variablen x, p_x und $\mathbf{L}^2$.

Aufgabe 26. Energieerhaltung? (6 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das Jacobi-Integral und die Hamilton-Funktion erhalten sind und die Energie des Systems darstellen, falls $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ gilt und die eventuellen Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeitvariablen abhängen.
Zur Illustration betrachten wir einen Massenpunkt (Masse m), der reibungslos entlang des Kreisrandes $\{\mathbf{x}|\,|\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}| = l\}$ gleiten kann, wobei $\mathbf{X}(t)$ und l den Mittelpunkt und den Radius des Kreises darstellen. Der Kreis soll sich in der $\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2$-Ebene bewegen, so dass $\mathbf{X} = X_1\hat{\mathbf{e}}_1 + X_2\hat{\mathbf{e}}_2$ und $\mathbf{x} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2$ gilt; die Bewegung $\mathbf{X}(t)$ wird vorgegeben. Man kann die Bewegung des Massenpunkts also mit Hilfe einer einzelnen verallgemeinerten Koordinate φ beschreiben: $\mathbf{x}(\varphi, t) = \mathbf{X}(t) + l[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2]$.

(a) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die Energie E des Massenpunkts an.

(b) Wählen Sie nun $L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2$ mit $\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{x}(\varphi, t)$, und leiten Sie aus dieser Lagrange-Funktion Ausdrücke für den verallgemeinerten Impuls und die Hamilton-Funktion ab.

(c) Wie muss man $\mathbf{X}(t)$ wählen, damit die Hamilton-Funktion für alle möglichen physikalischen Bahnen erhalten ist? Ist dann auch die Energie erhalten? Falls nein: Erklären Sie dies. Falls ja: Hätten Sie dies auch aufgrund allgemeiner Überlegungen vorhersehen können?