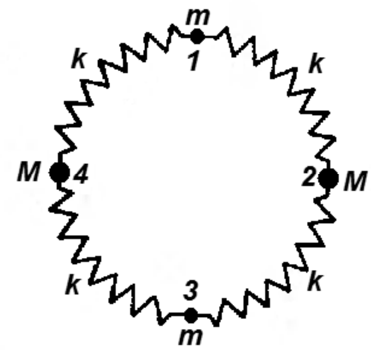
Aufgabenblatt 9, Abgabe: 05. 01. 2009

Aufgabe 27. Der schwingende Kreis (7 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Wir betrachten vier Massenpunkte (1. und 3. Massenpunkte der Masse m, 2. und 4. Massenpunkte der Masse M) in der $x_1 - x_2$-Ebene, die sich auf dem sterren Kreis mit dem Radius R reibungslos bewegen können. Die Massen sind entlang den Kreisumfang durch vier ideale Federn mit der Federkonstanten k miteinander verbunden. In der Gleichgewichtslage des Systems sind die Längen aller Federn gleich.



(a) Geben Sie für den Fall kleiner Auslenkungen von der Gleichgewichtslage die Lagrange-Funktion des Systems und die entsprechende Lagrange-Gleichungen an.

(b) Bestimmen Sie aus dem Ansatz $\mathbf{q}^{(\mu)}(t) = \mathbf{q}_0^{(\mu)} \sin(\omega t)$ die Normalschwingungen und Eigenfrequenzen des Systems. Ist die Gleichgewichtslage des Systems stabil?

(c) Skizzieren Sie die Normalschwingungen.

(d) **Bonuspunkte:** Bestimmen Sie gemäß der Vorlesung die Matrix B' (für die $\ddot{\mathbf{q}}'' = -B'\mathbf{q}''$ gilt) und zeigen Sie, dass $\mathbf{q}_0'' = (1, \sqrt{M/m}, 1, \sqrt{M/m})$ ein Eigenvektor von B' ist. Welchem Eigenvektor des ursprunglichen Problems entspricht $\mathbf{q}_0''$? Geben Sie explizit die Zeitabhängigkeit der entsprechenden Bewegungung des Systems an.

Aufgabe 28. Rotierendes Koordinatensystem (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}$, die relativ zu einem Inertialsystem gemessen werden. Das Teilchen befindet sich in einem sphärisch symmetrischen Potential $V(x)$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|$. Es wird nun eine Transformation auf verallgemeinerte Koordinaten $\mathbf{q}$ durchgeführt, wobei die Variablen $\mathbf{q}$ die Lage des Teilchens in einem Koordinatensystem beschreiben, das relativ zum Inertialsystem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die $\hat{\mathbf{e}}_3$-Achse rotiert: $\mathbf{x} = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{q}$ mit $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\omega} t$ und $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{e}}_3$.

(a) Zeigen Sie: $\dot{\mathbf{x}} = R(\boldsymbol{\alpha})(\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})$. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ des Teilchens in verallgemeinerten Koordinaten und leiten Sie hieraus die folgende Bewegungsgleichung ab:

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) \,. \tag{1}$$

Bestimmen Sie die mit $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ assoziierte Hamilton-Funktion und die entsprechenden Hamilton-Gleichungen.

Der zweite Term im rechten Glied von (**??**) stellt die Coriolis-Kraft dar (Aussprache: Korīōlī, *nicht* Koriŏ́lis), der dritte Term ist die Zentrifugalkraft.

(b) Erklären Sie, warum Winde auf der nördlichen (bzw. südlichen) Halbkugel nach rechts (bzw. links) abgebogen werden. Betrachten Sie nun ein Teilchen, welches im Schwerkraftfeld der Erde mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$ hundert Meter senkrecht über einem Punkt P der Erdoberfläche am Äquator losgelassen wird. In welcher Entfernung/Richtung von P trifft es (näherungsweise im reibungsfreien Fall) auf?

Transformieren Sie nun auf sphärische Koordinaten (q, ϑ, φ) mit $\mathbf{q} \equiv q\hat{\mathbf{e}}_q$ und dem Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}_q = (\sin(\vartheta)\cos(\varphi), \sin(\vartheta)\sin(\varphi), \cos(\vartheta))$.

(c) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(q, \vartheta, \varphi, \dot{q}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ und die entsprechenden verallgemeinerten Impulse. Bestimmen Sie die mit $L(q, \vartheta, \varphi, \dot{q}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ assoziierte Hamilton-Funktion H. Ist H erhalten? Ist H gleich der Energie?

Aufgabe 29. Poisson-Klammern des Drehimpulses (3 Punkte)

Betrachten Sie ein einzelnes Teilchen der Masse m im Phasenraum $\{(\mathbf{x}, \mathbf{p})\}$, wobei $\mathbf{x}$ die kartesischen Koordinaten des Teilchens relativ zu einem Inertialsystem darstellt und $\mathbf{p}$ der entsprechende (kinetische) Impuls ist. Der (kinetische) Drehimpuls ist somit durch $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ definiert. Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{L_i, x_j\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$, $\{L_i, p_j\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$, $\{L_i, L_j\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$ und $\{\mathbf{L}^2, L_i\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$. Was fällt Ihnen bei den ersten drei Klammern auf?