Aufgabenblatt 10, Abgabe: 12. 01. 2009

Aufgabe 30. Das Kepler-Problem (9 Punkte)

Betrachten Sie das Kepler-Problem,

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(x) \ , \ V(x) = -\frac{\mathcal{G}\mu M}{x}.$$

(a) Zeigen Sie explizit mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ und der Lenz'sche Vektor $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\mu}\mathbf{p} \times \mathbf{L} + V(x)\mathbf{x}$$

Erhaltungsgrößen des Systems darstellen.

(b) Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{L_k, a_l\}$ und $\{a_k, a_l\}$ $(k, l \in \{1, 2, 3\})$.

Aufgabe 31. Transformationen im Phasenraum (8 Punkte)

Wir betrachten ein einfaches eindimensionales System, das im Phasenraum durch die Variablen (q, p) beschrieben wird; es gilt $\{q, p\} = \delta_{kl}$. Wir führen nun einige Transformationen der Form $(q, p) \to (\bar{q}, \bar{p})$ durch. Untersuchen Sie für die folgenden Transformationen, ob bzw. für welche (α, β, γ)-Werte sie die fundamentalen Poisson-Klammern invariant lassen und ob bzw. für welche (α, β, γ)-Werte sie eine Berührungstransformation darstellen:

(i) $\bar{q} = \ln[1 + \sqrt{q}\cos(p)] \quad , \quad \bar{p} = \alpha[1 + \sqrt{q}\cos(p)]\sqrt{q}\sin(p)$

(ii) $\bar{q} = \ln[q^{-1}\sin(p)] \quad , \quad \bar{p} = \alpha q \cot(p)$

(iii) $\bar{q} = q^\alpha \cos(\beta p) \quad , \quad \bar{p} = \gamma q^\alpha \sin(\beta p) \quad .$

Geben Sie die entsprechende erzeugende Funktion $F_3(p, \bar{q}, t)$ explizit an, falls Sie der Meinung sind, dass die Transformation eine Berührungstransformation darstellt.

Aufgabe 32. Hamilton-Jacobi-Formalismus (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Bahn $x(t)$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

durch Lösen der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Berechnen Sie dazu das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

elementar.