

**Aufgabe 33. Invarianz der allgemeinen Poisson-Klammer** (3 Punkte)

Die *fundamentalen* Poisson-Klammern sind bekanntlich invariant unter beliebigen (eventuell zeitabhängigen) Berührungstransformationen  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \rightarrow (\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}})$ . Zeigen Sie ausgehend von diesem Ergebnis, dass auch die allgemeine Poisson-Klammer  $\{A, B\}$  invariant unter solchen Transformationen ist. Genauer formuliert: Seien  $A(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  und  $B(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$  zwei Observablen in den ursprünglichen Variablen und

$$\bar{A}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t) \equiv A(\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t), \mathbf{P}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t), t) \quad , \quad \bar{B}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t) \equiv B(\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t), \mathbf{P}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t), t)$$

die entsprechenden Ausdrücke in den neuen Variablen; zeigen Sie dann:  $\{\bar{A}, \bar{B}\}_{\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}} = \{A, B\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}}$ .

**Aufgabe 34. Lorentz-Invarianz der Wellengleichung** (4 Punkte)

Zeigen Sie explizit, dass die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

invariant unter Lorentz-Transformationen

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

aber nicht invariant unter Galilei-Transformationen ist.

**Aufgabe 35.  $x - y$  Lorentz-Boost** (3 Punkte + 3 Bonuspunkte)

- In Aufgabe 2 wurde die Lorentz-Transformation in der  $\hat{\mathbf{e}}_1$ -Richtung betrachtet. Finden Sie explizit die entsprechende Matrix für die Transformation in der  $\hat{\mathbf{e}}_2$ -Richtung.
- Führen Sie jetzt Lorentz-Boosts in die  $\hat{\mathbf{e}}_1$ - und  $\hat{\mathbf{e}}_2$ -Richtungen hintereinander aus. Kann das Ergebnis als Lorentz-Transformation dargestellt werden?
- Führen Sie die Lorentz-Boosts mit (i)  $-v_1 \hat{\mathbf{e}}_1$ , dann (ii)  $-v_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ , dann (iii)  $-v_1 \hat{\mathbf{e}}_1$  aus. Kann dieses Ergebnis als Lorentz-Transformation dargestellt werden? Bestimmen Sie die resultierende Geschwindigkeit.  
Unter welcher Bedingung bildet  $\mathbf{v}_{\text{ges}}$  einen Winkel von 45 Grad mit der  $\hat{\mathbf{e}}_1$ -Achse?

**Aufgabe 36. Über hyperbolische Bewegung und zwei Bärte** (10 Punkte)

Betrachten Sie wiederum zwei Inertialsysteme  $K$  und  $K'$  mit  $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$ . Wir wählen die  $x_1$ - und  $x'_1$ -Achsen von  $K$  und  $K'$  wieder parallel zur Geschwindigkeit:  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}'_1 = \hat{\mathbf{v}}$ .

- Leiten Sie aus dem relativistischen Transformationsgesetz für Geschwindigkeiten (s. § 6.4 des Theorie-I-Skripts) das folgende Transformationsgesetz für Beschleunigungen ab:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x'_1}{(dt')^2} \left/ \left[ \gamma \left( 1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'_1}{dt'} \right) \right]^3 \right. \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} .$$

Wir betrachten nun einen Körper, der zur Zeit  $t = 0$  im Ursprung  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  des Inertialsystems  $K$  ruht. Für  $t \geq 0$  wird der Körper beschleunigt in  $\hat{\mathbf{e}}_1$ -Richtung; die Größe der Beschleunigung ist hierbei konstant (und gleich  $a$ ) im jeweiligen Ruhesystem des Körpers.

- (b) Zeigen Sie, dass die dimensionslose Geschwindigkeit  $\beta = \frac{dx_1}{d(ct)}$  des Körpers die Gleichung  $\frac{d\beta}{dt} = \frac{a}{c}(1 - \beta^2)^{3/2}$  erfüllt, und leiten Sie hieraus für die  $x_1$ -Koordinate und die Eigenzeit des Körpers ab:

$$\beta(t) = \left[ 1 + \left( \frac{c}{at} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad x_1(t) = \sqrt{c^2 t^2 + \frac{c^4}{a^2}} - \frac{c^2}{a}, \quad \tau(t) = \frac{c}{a} \operatorname{arsinh} \left( \frac{at}{c} \right).$$

Erklären Sie den Namen „hyperbolische Bewegung“.

Als Anwendung betrachten wir Einsteins Theorem über das Zurückbleiben beschleunigter Uhren („Zwillingsparadoxon“): Zwei (männliche) Zwillinge trennen sich zur Zeit  $t = 0$ ; der eine verbringt seine Zeit ruhend im Ursprung des Inertialsystems  $K$ , der andere fliegt mit einer Rakete zu einem (einen Abstand  $L$  entfernten) Stern hin und her, wobei die (in seinem jeweiligen Ruhesystem gemessene) Beschleunigung betragsmäßig stets konstant ist (das erste und letzte Viertel der Reise sei die Beschleunigung  $+a$ , das zweite und dritte Viertel  $-a$ ).

- (c) Um wieviel jünger ist der Astronaut als sein Bruder, wenn er am Ende seiner Reise an den Ursprung zurückkehrt?

Nehmen wir an, der Ursprung  $\mathbf{0}$  entspricht der Erde, die Beschleunigung sei  $a = g \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$  und der Stern sei  $\alpha$  Centauri, so dass  $L \simeq 4,3$  Lichtjahre. Nehmen wir des Weiteren an, die Zwillinge sind zur Zeit  $t = 0$  wohlrasiert und lassen ab der Trennung ihre Bärte wachsen (mit einer Wachstumsgeschwindigkeit von  $2 \text{ cm/Monat}$ , wobei Länge und Zeit in ihrem Ruhesystem gemessen werden).

- (d) Wieviel länger ist der Bart des zurückgebliebenen Zwillinges als derjenige seines Bruders bei dessen Rückkehr (gemessen im Inertialsystem  $K$ )?