Aufgabenblatt 11, Abgabe: 19. 01. 2009

Aufgabe 33. Invarianz der allgemeinen Poisson-Klammer (3 Punkte)

Die *fundamentalen* Poisson-Klammern sind bekanntlich invariant unter beliebigen (eventuell zeitabhängigen) Berührungstransformationen $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \to (\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}})$. Zeigen Sie ausgehend von diesem Ergebnis, dass auch die allgemeine Poisson-Klammer $\{A, B\}$ invariant unter solchen Transformationen ist. Genauer formuliert: Seien $A(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ und $B(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ zwei Observablen in den ursprünglichen Variablen und

$$\bar{A}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t) \equiv A(\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t),\, \mathbf{P}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t), t) \quad , \quad \bar{B}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t) \equiv B(\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t),\, \mathbf{P}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}, t), t)$$

die entsprechenden Ausdrücke in den neuen Variablen; zeigen Sie dann: $\{\bar{A}, \bar{B}\}_{\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{P}}} = \{A, B\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}}$.

Aufgabe 34. Lorentz-Invarianz der Wellengleichung (4 Punkte)

Zeigen Sie explizit, dass die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

invariant unter Lorentz-Transformationen

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

aber nicht invariant unter Galilei-Transformationen ist.

Aufgabe 35. $x - y$ **Lorentz-Boost** (3 Punkte + 3 Bonuspunkte)

(a) In Aufgabe 2 wurde die Lorentz-Transformation in der $\hat{\mathbf{e}}_1$-Richtung betrachtet. Finden Sie explizit die entsprechende Matrix für die Transformation in der $\hat{\mathbf{e}}_2$-Richtung.

(b) Führen Sie jetzt Lorenz-Boosts in die $\hat{\mathbf{e}}_1$- und $\hat{\mathbf{e}}_2$-Richtungen hintereinander aus. Kann das Ergebnis als Lorentz-Transformation dargestellt werden?

(c) Führen Sie die Lorenz-Boosts mit (i) $-v_1 \hat{\mathbf{e}}_1$, dann (ii) $-v_2 \hat{\mathbf{e}}_2$, dann (iii) $-v_1 \hat{\mathbf{e}}_1$ aus. Kann dieses Ergebnis als Lorentz-Transformation dargestellt werden? Bestimmen Sie die resultierende Geschwindigkeit.
Unter welcher Bedingung bildet $\mathbf{v}_{\text{ges}}$ einen Winkel von 45 Grad mit der $\hat{\mathbf{e}}_1$-Achse?

Aufgabe 36. Über hyperbolische Bewegung und zwei Bärte (10 Punkte)

Betrachten Sie wiederum zwei Inertialsysteme K und K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$. Wir wählen die x_1- und x'_1-Achsen von K und K' wieder parallel zur Geschwindigkeit: $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}'_1 = \hat{\mathbf{v}}$.

(a) Leiten Sie aus dem relativistischen Transformationsgesetz für Geschwindigkeiten (s. § 6.4 des Theorie-I-Skripts) das folgende Transformationsgesetz für Beschleunigungen ab:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 x'_1}{(dt')^2} \Bigg/ \left[\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'_1}{dt'}\right)\right]^3 \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \, .$$

Wir betrachten nun einen Körper, der zur Zeit $t = 0$ im Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Inertialsystems K ruht. Für $t \geq 0$ wird der Körper beschleunigt in $\hat{\mathbf{e}}_1$-Richtung; die Größe der Beschleunigung ist hierbei konstant (und gleich a) im jeweiligen Ruhesystem des Körpers.

(b) Zeigen Sie, dass die dimensionslose Geschwindigkeit $\beta = \frac{dx_1}{d(ct)}$ des Körpers die Gleichung $\frac{d\beta}{dt} = \frac{a}{c}(1-\beta^2)^{3/2}$ erfüllt, und leiten Sie hieraus für die x_1-Koordinate und die Eigenzeit des Körpers ab:

$$\beta(t) = \left[1 + \left(\frac{c}{at}\right)^2\right]^{-1/2}, \quad x_1(t) = \sqrt{c^2t^2 + \frac{c^4}{a^2}} - \frac{c^2}{a} \quad , \quad \tau(t) = \frac{c}{a}\,\mathrm{arsinh}\left(\frac{at}{c}\right) .$$

Erklären Sie den Namen „hyperbolische Bewegung“.

Als Anwendung betrachten wir Einsteins Theorem über das Zurückbleiben beschleunigter Uhren („Zwillingsparadoxon“): Zwei (männliche) Zwillinge trennen sich zur Zeit $t = 0$; der eine verbringt seine Zeit ruhend im Ursprung des Inertialsystems K, der andere fliegt mit einer Rakete zu einem (einen Abstand L entfernten) Stern hin und her, wobei die (in seinem jeweiligen Ruhesystem gemessene) Beschleunigung betragsmäßig stets konstant ist (das erste und letzte Viertel der Reise sei die Beschleunigung $+a$, das zweite und dritte Viertel $-a$).

(c) Um wieviel jünger ist der Astronaut als sein Bruder, wenn er am Ende seiner Reise an den Ursprung zurückkehrt?

Nehmen wir an, der Ursprung $\mathbf{0}$ entspricht der Erde, die Beschleunigung sei $a = g \simeq 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2$ und der Stern sei α Centauri, so dass $L \simeq 4{,}3$ Lichtjahre. Nehmen wir des Weiteren an, die Zwillinge sind zur Zeit $t = 0$ wohlrasiert und lassen ab der Trennung ihre Bärte wachsen (mit einer Wachstumsgeschwindigkeit von 2 cm/Monat, wobei Länge und Zeit in ihrem Ruhesystem gemessen werden).

(d) Wieviel länger ist der Bart des zurückgebliebenen Zwillings als derjenige seines Bruders bei dessen Rückkehr (gemessen im Inertialsystem K)?