Aufgabenblatt 12, Abgabe: 26. 01. 2009

Aufgabe 37. Der Doppler-Effekt (4 Punkte)

Ein Polizist behauptet, ein Autofahrer sei mit überhöhter Geschwindigkeit durch Rot ($\lambda = 650$ nm) gefahren. Der Autofahrer behauptet, er habe Grün ($\lambda = 530$ nm) gesehen. Nehmen wir an, beide haben Recht.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Autofahrers beim Blick (in Fahrtrichtung) auf die Ampel.

Nehmen wir nun an, der Autofahrer sieht die Ampel in einer Seitenstraße und zwar aus einer Richtung, die genau senkrecht auf seiner Geschwindigkeitsrichtung steht. Obwohl die Ampel grün ist, sieht der Autofahrer dieses Mal Rot.

(b) Bestimmen Sie wieder die Geschwindigkeit des Autofahrers beim Blick auf die Ampel.

Aufgabe 38. Die Photonenrakete (11 Punkte)

Wir betrachten eine Rakete, die sich geradlinig bewegt und durch Photonenausstoß angetrieben wird: Strahlt die Rakete Photonen (und somit Masse und Energie und Impuls) in der Rückwärtsrichtung aus, so erfährt sie nach dem Impulserhaltungssatz eine Kraft nach vorne. Wir nehmen an, dass der Antriebsmechanismus der Rakete imstande ist, Masse vollständig in Strahlung (Photonen) umzusetzen, und bezeichnen die (zeitabhängige) Masse der Rakete, gemessen in ihrem momentanen Ruhesystem, als M. Zur Zeit $t = 0$ möge die Rakete im Inertialsystem K ruhen, ihre Masse zu diesem Zeitpunkt sei M_0.

(a) Zeigen Sie:

$$\frac{dM}{d\beta} = -\gamma^2 M \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \, ,$$

wobei v die Geschwindigkeit der Rakete im Inertialsystem K ist, und bestimmen Sie $M(\beta)$ aus dieser Gleichung. **Hinweis:** Verwenden Sie bei Bedarf Aufgabe 36 (a).

Nehmen wir nun an, die Rakete soll eine Raumkapsel mit einem Ruhegewicht von 20 Tonnen von der Erde nach α-Centauri hin- und hertransportieren, und zwar so, dass sie sowohl auf der Hin- als auch auf der Rückreise eine Maximalgeschwindigkeit von 0,8 c erreicht. Einfachheitshalber vernachlässigen wir die Effekte der Schwerkraft nahe der Erde und α-Centauri.

(b) Bestimmen Sie das hierzu erforderliche Minimalgewicht M_0 der Rakete beim Start.

Wir betrachten wieder das allgemeine, in (a) untersuchte Problem und nehmen zusätzlich an, der Antrieb der Rakete funktioniere so, dass die in Photonen umgesetzte Masse (gemessen im momentanen Ruhesystem der Rakete) stets proportional zu M ist.

(c) Bestimmen Sie $\beta(t)$ und die Eigenzeit $\tau(t)$ der Rakete; hierbei bezeichnet t die Zeit in K.

Nehmen wir nun alternativ an, der Antrieb funktioniere so, dass die in Photonen umgesetzte Masse pro Zeiteinheit (gemessen im momentanen Ruhesystem der Rakete) konstant ist.

(d) Bestimmen Sie die funktionale Beziehung zwischen β und t in diesem Fall und skizzieren Sie sie.

Aufgabe 39. Ein Würfel kippt über die Tischkante (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment

$$\Theta = \int_{\text{Körper}} r^2 dm = \int_{\text{Körper}} r^2 \rho dV$$

eines Würfels mit homogener Dichte ρ und der Seitenlänge a (i) um eine Achse durch den Schwerpunkt parallel zu einer der Würfelseiten, und (ii) um eine seiner Kanten. Wie lautet jeweils die kinetische Energie $T(\omega)$?

(b) Betrachten Sie jetzt einen Würfel mit der Seitenlänge a und der Masse M, der mit konstanter Geschwindigkeit v_0 auf einer reibungsfreier Platte rutscht. Am Ende der Fläche stößt er inelastisch an ein Hindernis und kippt über die Kante. Bestimmen Sie die Minimalgeschwindigkeit v_0, bei der der Würfel noch von der Platte fällt.