Aufgabenblatt 13, Abgabe: 02.02. 2009

Aufgabe 40. Relativistisches Teilchen im Magnetfeld (4 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Ruhemasse m_0 und der Ladung q in einem räumlich homogenen, zeitunabhängigen Magnetfeld $\mathbf{B}$. Der kinetische Impuls $\boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$ und die Energie $\mathcal{E} = \gamma_u m_0 c^2$ des Teilchens erfüllen die Bewegungsgleichungen $\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ und $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$. Die Anfangsbedingung lautet $\mathbf{u}(0) \equiv \mathbf{u}_0$ und $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie $\mathbf{x}(t)$.

Aufgabe 41. Der Lorentz-Boost und elektromagnetische Felder (5 Punkte)

Wie aus der Vorlesung bekannt, kann der (antisymmetrische) elektromagnetische Feldstärketensor durch die elektromagnetischen Felder ausgedrückt werden: $F^{i0} = E_i$, $F^{ij} = -c\varepsilon_{ijk}B_k$. Als echter Tensor wird er wie folgt transformiert:

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}$$

Wir betrachten nun die explizite Form des Lorentz-Boosts:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbb{1}_3 + (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie explizit das Transformationsverhalten der $\mathbf{E}$- und $\mathbf{B}$-Felder unter dieser Lorentz-Transformation und leiten Sie folgende Ausdrücke ab:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) - (\gamma-1)(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{E})\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}) - (\gamma-1)(\hat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{B})\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie zusätzlich für die Komponenten:

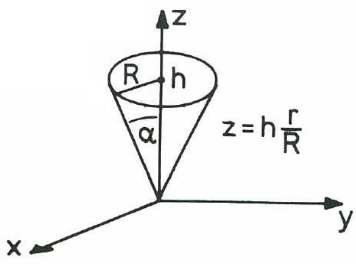
$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} & \qquad B'_{\parallel} &= B_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_{\perp} & \qquad \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}_{\perp} \end{aligned}$$

Aufgabe 42. Der rollende Kreiskegel (11 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor eines homogenen geraden Kreiskegels der Dichte ρ mit der Masse m, der Höhe h und dem Öffnungswinkel 2α bezogen auf die Spitze des Kreiskegels in der Form

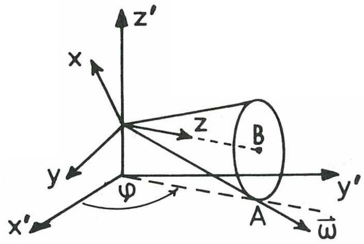
$$I = \begin{pmatrix} I_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp & 0 \\ 0 & 0 & I_\parallel \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann, wobei für die Komponenten des Trägheitstensors gilt: $I_\parallel = \frac{3}{10}mh^2\tan^2\alpha$ und $I_\perp = \frac{3}{20}mh^2(\tan^2\alpha + 4)$. Wie lautet die kinetische Energie bei Rotationen um eine beliebige Achse durch die Spitze?



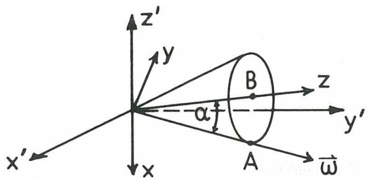
(b) Betrachten wir eine Anordnung, in der der Basiskreis des Kreiskegels auf einer Ebene rollt, während die Spitze so (drehbar) fixiert ist, dass die Längsachse des Kegels stets parallel zur Ebene verläuft. Zeigen Sie (φ sei der Winkel zwischen dem Auflagepunkt und einem körperfesten Bezugspunkt auf dem Basiskreis):

$$T(\dot{\varphi}) = \frac{3}{40} m h^2 \dot{\varphi}^2 (6 + \tan^2 \alpha)$$



(c) Betrachten wir nun eine Anordnung, bei der der Mantel des Kreiskegels auf einer Ebene abrollt. Zeigen Sie:

$$T(\dot{\varphi}) = \frac{3}{40} m h^2 \dot{\varphi}^2 (1 + 5 \cos^2 \alpha)$$



(d) Finden Sie die Periode kleiner Schwingungen des Kreiskegels für die Anordnungen von Teil (b) und (c), falls die Ebenen um einen Winkel β geneigt sind.