Übungsaufgaben zur Vorlesung
Theoretische Physik 2 „Allgemeine Mechanik“
Prof. Dr. Nils Blümer
KOMET 337, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 1, Abgabe: 31. 10. 2011

Aufgabe 1. Kraftfelder (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Kraftfelder konservativ sind und bestimmen Sie ggf. das zugehörige Potential $V(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} \tag{1}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \alpha \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \tag{2}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \alpha \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \exp(-\lambda|\mathbf{x}|) \tag{3}$$

Hier $\mathbf{a}$ sei ein beliebiger, fester Vektor im $\mathbb{R}^3$ und α, $\lambda \in \mathbb{R}$ seien konstante Parameter.

Aufgabe 2. Das Zweiteilchenproblem (8 Punkte)

Die Bewegungsgleichung für den Relativvektor $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ zweier Teilchen der Massen m_1 bzw. m_2, deren Paarpotential nur vom Abstand abhängt, ist im Schwerpunktsystem bekanntlich durch

$$\mu\ddot{\mathbf{x}} + V'(x)\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad , \quad x \equiv |\mathbf{x}|$$

gegeben. Hierbei stellt $\mu = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1}$ die reduzierte Masse dar, und $V(x)$ ist das Potential, aus dem die Zweiteilchenkraft hergeleitet werden kann. Wählen Sie $\hat{\mathbf{e}}_3 \parallel \mathbf{L}$, so dass $\mathbf{L} = L\hat{\mathbf{e}}_3$ mit $L \geq 0$ gilt und die Bewegung in der $\hat{\mathbf{e}}_1$-$\hat{\mathbf{e}}_2$-Ebene stattfindet. Führen Sie Polarkoordinaten (x, φ) mit $\mathbf{x} = x[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2]$ ein.

(a) Betrachten Sie Kreisbahnen mit dem Radius x_{min} als mögliche Lösungen des Zweiteilchenproblems und bestimmen Sie (falls solche Lösungen existieren) L und die Umlaufzeit T auf der Kreisbahn als Funktion von x_{min}. Zeigen Sie, dass das dritte Kepler'sche Gesetz für den Spezialfall des Kepler-Problems, $V(x) = -\frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{x}$, erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie für ein allgemeines Potential $V(x)$ die Frequenz möglicher kleiner Schwingungen um die Kreisbahn. Sind die Bahnen solcher kleinen Schwingungen im Allgemeinen geschlossen?

(c) Zeigen Sie für den Spezialfall des Kepler-Problems, dass der „Lenz'sche Vektor“ $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{L} + V(x)\mathbf{x}$ eine zusätzliche Erhaltungsgröße darstellt.

(d) Betrachten Sie jetzt speziell den Fall $V(x) = 0$. Bestimmen Sie explizit die Bahn $x(\varphi)$; verwenden Sie dabei die Substitution $y = b/x$ mit $b = L/\sqrt{2E\mu}$. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. Welche Rolle spielt der Parameter b?

Aufgabe 3. Hyperbolische Bewegung (8 Punkte)

Betrachten Sie zwei Inertialsysteme K und K' mit $\mathbf{v}_{\text{rel}}(K', K) = \mathbf{v}$. Wir wählen die x_1- und x'_1-Achsen von K und K' parallel zur Geschwindigkeit: $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}'_1 = \hat{\mathbf{v}}$. Die Koordinaten in K und K' sind in diesem Fall durch eine Lorentz-Transformation der Form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}'_\perp = \mathbf{x}_\perp \, , \tag{4}$$

miteinander verknüpft, wobei $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta \equiv \frac{v}{c}$ gilt.

(a) Wie lautet das Transformationsgesetz für Geschwindigkeiten (d.h. zwischen dx_1/dt und dx'_1/dt')? Leiten Sie dies aus der Transformation (4) her.

(b) Leiten Sie aus dem relativistischen Transformationsgesetz für Geschwindigkeiten das folgende Transformationsgesetz für Beschleunigungen ab:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x'_1}{(dt')^2} \Bigg/ \left[\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'_1}{dt'}\right)\right]^3 \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \, .$$

Wir betrachten nun einen Körper, der zur Zeit $t = 0$ im Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Inertialsystems K ruht. Für $t \geq 0$ wird der Körper beschleunigt in $\hat{\mathbf{e}}_1$-Richtung; die Größe der Beschleunigung ist hierbei konstant (und gleich a) im jeweiligen Ruhesystem des Körpers.

(c) Zeigen Sie, dass die dimensionslose Geschwindigkeit $\beta_1 = \frac{dx_1}{d(ct)}$ des Körpers die Gleichung $\frac{d\beta_1}{dt} = \frac{a}{c}(1-\beta_1^2)^{3/2}$ erfüllt, und leiten Sie hieraus für die x_1-Koordinate und die Eigenzeit des Körpers ab:

$$\beta_1(t) = \left[1 + \left(\frac{c}{at}\right)^2\right]^{-1/2} , \quad x_1(t) = \sqrt{c^2t^2 + \frac{c^4}{a^2}} - \frac{c^2}{a} \quad , \quad \tau(t) = \frac{c}{a}\,\mathrm{arsinh}\left(\frac{at}{c}\right) \, .$$

Erklären Sie den Namen „hyperbolische Bewegung“.