Übungsaufgaben zur Vorlesung
Theoretische Physik 2 „Allgemeine Mechanik"
Prof. Dr. Nils Blümer
KOMET 337, Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität

Aufgabenblatt 3, Abgabe: 14. 11. 2011

Aufgabe 7. Die Energie als Erhaltungsgröße (3 Punkte)

Wir wissen bereits, dass die Größe $\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - L$ die Energie der physikalischen Bahn eines Teilchens darstellt, falls die Lagrange-Funktion die Form $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\dot{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{x})$ hat. In dieser Aufgabe betrachten wir allgemein eine Lagrange-Funktion $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, die zwar nach wie vor nicht explizit von der Zeitvariablen abhängt, aber nicht unbedingt die einfache Form $L = T(\dot{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{x})$ haben muss.

(a) Zeigen Sie, dass für eine solche Lagrange-Funktion die „Energie" $\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - L$ der physikalischen Bahn immer eine Erhaltungsgröße ist.

(b) Zeigen Sie analog, dass die „Energie" $\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} - L$ der physikalischen Bahn eines N-Teilchen-Systems eine Erhaltungsgröße ist, falls die Lagrange-Funktion $L(\{\mathbf{x}_i\}, \{\dot{\mathbf{x}}_i\})$ nicht explizit von der Zeitvariablen abhängt.

Aufgabe 8. Explizite Berechnung von Wirkungsfunktionalen (7 Punkte)

Wir betrachten eine eindimensionale Bewegung eines Teilchens. Lösen Sie jeweils die Lagrange-Gleichungen und berechnen Sie den Wert des Wirkungsfunktionals

$$S_{(x_1,t_1)}^{(x_2,t_2)}[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(x(t), \dot{x}(t), t)$$

für die physikalische Bahn $x_\phi(t)$ (als Funktion der Randkoordinaten t_i, x_i)

(a) für ein freies Teilchen mit der Lagrange-Funktion $L(x, \dot{x}, t) = (m/2)\dot{x}^2$;

(b) für einen harmonischen Oszillator mit der Lagrange-Funktion $L(x, \dot{x}, t) = (m/2)(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für die physikalische Bahn $x_\phi(t)$ des harmonischen Oszillators gilt

$$S_\phi = \frac{m}{2}[x_\phi(t)\dot{x}_\phi(t)]\Big|_{t_1}^{t_2} .$$

(c) Zeigen Sie explizit, dass das Ergebnis (b) im Limes $\omega \to 0$ den freien Fall (a) reproduziert.

Aufgabe 9. Modifiziertes Hamilton-Prinzip (6 Punkte)

Betrachten Sie nun ein modifiziertes Hamilton'sches Prinzip, das besagt, dass die physikalische Bahn eines Teilchens das Wirkungsfunktional

$$S[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, t)$$

extremal macht. Bei der Variation der Bahn sind nun die Ortskoordinaten $\mathbf{x}(t_1)$ und $\mathbf{x}(t_2)$ und die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}(t_1)$ und $\dot{\mathbf{x}}(t_2)$ im Start- und im Endpunkt festzuhalten. Beachten Sie, dass die verallgemeinerte Lagrange-Funktion L nun auch von der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}$ abhängen darf.

(a) Wie lautet die (verallgemeinerte) Lagrange-Gleichung für die physikalische Bahn in diesem Fall?

(b) Warum wäre ein solches modifiziertes Hamilton-Prinzip im Allgemeinen unverträglich mit dem deterministischen Prinzip der Klassischen Mechanik?

Aufgabe 10. Invarianzen der Lagrange-Gleichung (4 Punkte)

(a) Wir betrachten abgeschlossene mechanische Systeme. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion L unter Galilei-Transformationen wie

$$L' = L + \frac{d}{dt}\lambda(\mathbf{X}, t)$$

transformiert wird, und geben Sie $\lambda(\mathbf{X}, t)$ an.

(b) Bei einer Eichtransformation werden die elektromagnetischen Potentiale $(\mathbf{A}, \Phi)$ wie folgt transformiert:

$$\tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A} - \frac{1}{c}\nabla\Lambda \ , \ \tilde{\Phi} \equiv \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \ ,$$

wobei die orts- und zeitabhängige Funtion $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ beliebig ist. Zeigen Sie, dass sich die Lagrange-Funktion eines N-Teilchen-Systems unter einer solchen Eichtransformation wiederum nur um eine vollständige Zeitableitung ändert, und geben Sie $\lambda(\mathbf{X}, t)$ an.

(c) Was folgt jeweils für die Lagrange-Gleichung?