



Aufgabe 11. Rheonome Zwangsbedingungen (5 Punkte)

Betrachten Sie ein mathematisches Pendel, das sich in der x_1 - x_3 -Ebene bewegt und aus einem starren masselosen Stab der Länge l besteht, der an einem Ende im bewegten Punkt $\mathbf{a}(t)$ aufgehängt ist und an dessen anderem Ende, das die Koordinaten \mathbf{x} hat, ein Massenpunkt m befestigt ist. Die Beschleunigung der Schwerkraft sei $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$. Wir definieren den Winkel φ durch $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_3) \equiv l \cos(\varphi)$ und $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \equiv l \sin(\varphi)$. Bestimmen Sie die kinetische Energie $T(\varphi, \dot{\varphi}, t)$, die potentielle Energie $V(\varphi, \dot{\varphi}, t)$ und somit auch die Lagrange-Funktion $L(\varphi, \dot{\varphi}, t) \equiv T - V$ des Massenpunktes, falls der Aufhängepunkt in folgender Weise bewegt wird:

- (a) $\mathbf{a}(t) = a[\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_3]$
- (b) $\mathbf{a}(t) = a \cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_1$
- (c) $\mathbf{a}(t) = a \sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_3$

Geben Sie jeweils an, welche Terme in der Lagrange-Funktion weggelassen werden können, da sie vollständige Zeitableitungen darstellen.

Aufgabe 12. Das sphärische Pendel (8 Punkte)

Wir betrachten zunächst eine allgemeine Lagrange-Funktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ der verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q} = \{q_k\}$, der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_k\}$ und der Zeit t .

- (a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung invariant ist unter der Addition einer Konstanten zur Lagrange-Funktion.

Betrachten Sie nun speziell das sphärische Pendel der Länge l ($\vartheta = 0$ in Gleichgewichtslage). Hier gilt:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{x}(\vartheta, \varphi) = (l \sin \vartheta \cos \varphi, l \sin \vartheta \sin \varphi, -l \cos \vartheta)$$

- (b) Werten Sie den allgemeinen Ausdruck

$$T(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right|^2$$

aus und zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion des sphärischen Pendels in sphärischen Koordinaten durch

$$L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 \left[\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\vartheta) \right] + m g l \cos(\vartheta)$$

gegeben ist. Geben Sie die resultierenden Lagrange-Gleichungen an.

- (c) Bestimmen Sie die möglichen Lösungen mit $\vartheta = \vartheta_0 = \text{konstant}$. Beschreiben Sie in Worten, welche Art von Pendelbewegung diese Lösungen darstellen.
- (d) Zeigen Sie, dass man die unter (c) bestimmten Lösungen mit $\vartheta = \vartheta_0$ *nicht* erhält, falls man den (konstanten?!) Term $m g l \cos(\vartheta)$ in der Lagrange-Funktion weglässt. Erklären Sie, ob dies Ihren Schlussfolgerungen in (a) widerspricht; begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 13. Zwei Massen am Faden (7 Punkte)

Wir betrachten zwei Massenpunkte, die durch einen masselosen Faden mit der konstanten Gesamtlänge l verbunden sind. Der erste Massenpunkt [mit der Masse m_1 und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_1(t)$] kann an dem Faden mit der variierenden Teillänge l_1 auf der x_1 - x_2 -Ebene rotieren. Der Faden führt von m_1 durch ein Loch in der x_1 - x_2 -Ebene zu dem zweiten Massenpunkt [mit der Masse m_2 und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_2(t)$], wobei die Masse m_2 an dem straff gespannten Faden mit der ebenfalls veränderlichen Teillänge $l_2 = l - l_1$ hängt. Diese Anordnung kann im Schwerfeld $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$ je nach den Werten, die Winkelgeschwindigkeit bei der Rotation von m_1 auf der Ebene annimmt, nach oben oder nach unten rutschen. Dabei soll sich die Masse m_2 nur vertikal bewegen können, Reibung soll an keiner Stelle auftreten.

- (a) Klassifizieren Sie dieses System nach Gesichtspunkten: skleronom oder rheonom, holonom oder nicht holonom, konservativ oder nicht konservativ.

Wir bezeichnen den Winkel zwischen dem Vektor \mathbf{x}_1 und der $\hat{\mathbf{e}}_1$ -Richtung als φ :

$$\mathbf{x}_1 = l_1[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2], \quad \mathbf{x}_2 = -l_2\hat{\mathbf{e}}_3$$

und wählen nun φ und l_2 als verallgemeinerte Koordinaten.

- (b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(\varphi, l_2, \dot{\varphi}, \dot{l}_2, t)$ und die entsprechenden Lagrange-Gleichungen.
- (c) Zeigen Sie anhand der Lagrange-Gleichungen explizit, dass die Gesamtenergie und der generalisierte Impuls $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ erhalten bleiben.
- (d) Bestimmen Sie den Gleichgewichtszustand des Systems und die Bedingungen dafür, dass sich der Faden nach oben bewegt.