Aufgabenblatt 5, Abgabe: 28. 11. 2011

Aufgabe 14. Das Doppelpendel (11 Punkte)

Wir betrachten zwei Massenpunkte, die sich im Schwerkraftfeld $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$ in der x_1-x_3–Ebene bewegen können. Der erste Massenpunkt [mit der Masse m_1 und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_1(t)$] ist mittels eines starren masselosen Stabs der Länge l_1 mit dem Ursprung verbunden. Der zweite Massenpunkt [mit der Masse m_2 und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_2(t)$] ist mittels eines starren masselosen Stabs der Länge l_2 mit dem ersten Massenpunkt verbunden. Abgesehen von den Zwangsbedingungen $|\mathbf{x}_1| = l_1$ und $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = l_2$ sind die Massenpunkte frei beweglich. Wir bezeichnen die Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{x}_1$ bzw. $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ und der $(-\hat{\mathbf{e}}_3)$-Richtung als φ_1 und φ_2:

$$\mathbf{x}_1 = l_1\,[\sin(\varphi_1)\,\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos(\varphi_1)\,\hat{\mathbf{e}}_3] \quad , \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + l_2\,[\sin(\varphi_2)\,\hat{\mathbf{e}}_1 - \cos(\varphi_2)\,\hat{\mathbf{e}}_3]$$

und betrachten zunächst allgemeine (d. h. nicht notwendigerweise kleine) Auslenkungen des Doppelpendels.

(a) Bestimmen Sie die potentielle Energie $V(\varphi_1, \varphi_2)$ des Doppelpendels.

(b) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie in der Form

$$T(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = \tfrac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{2} a_{kl}(\varphi_1, \varphi_2)\dot{\varphi}_k\dot{\varphi}_l$$

darstellbar ist, und bestimmen Sie den „Massentensor" a_{kl} explizit.

Wir untersuchen nun den Fall *kleiner Schwingungen* und vernachlässigen alle Beiträge zu T und V, die von höherer als quadratischer Ordnung in den Variablen $(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2)$ sind.

(c) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = T - V$ in dieser Näherung und geben Sie die entsprechenden Lagrange-Gleichungen an.

(d) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und die Normalschwingungen des Doppelpendels; skizzieren Sie die Normalschwingungen. *Hinweis:* Normalschwingungen $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2)$ sind durch eine wohldefinierte (Eigen-)frequenz ω charakterisiert und können in der Form $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}_0 \cos[\omega(t - t_0)]$ mit zeitunabhängigem $\boldsymbol{\varphi}_0 \neq \mathbf{0}$ dargestellt werden.

Aufgabe 15. Eine Rolle und ein Seil (6 Punkte)

Betrachten Sie zwei Massenpunkte (mit den Massen m_1 und m_2 und den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$), die an den Endpunkten eines Seils der Länge l befestigt sind. Das Seil kann sich im (konstanten) Schwerkraftfeld $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_3$ über eine Rolle (mit dem Radius R) bewegen, die sich hierbei reibungslos um die $\hat{\mathbf{e}}_1$-Achse dreht. Wir wählen verallgemeinerte Koordinaten z_1 und z_2, die durch

$$\mathbf{x}_1 = -R\hat{\mathbf{e}}_2 + z_1\hat{\mathbf{e}}_3 \quad , \quad \mathbf{x}_2 = R\hat{\mathbf{e}}_2 + z_2\hat{\mathbf{e}}_3 \qquad (z_{1,2} < 0)$$

definiert sind und die Zwangsbedingung $f(z_1, z_2) \equiv z_1 + z_2 + l - \pi R = 0$ erfüllen. Zur Zeit $t = 0$ soll $z_1(0) = z_0$ und $\dot{z}_1(0) = \dot{z}_0$ gelten. Wir nehmen an, dass das Seil so lang ist und die Anfangsbedingungen so gewählt sind, dass das Seil während unserer Überlegungen nicht von der Rolle rutscht.

(a) Geben Sie die Lagrange-Gleichung der *ersten* Art an und bestimmen Sie die vom Seil auf die Massenpunkte ausgeübten Zwangskräfte für den Fall, dass das Seil als masselos angesehen werden kann.

Eliminieren Sie nun die Zwangsbedingung $f(z_1, z_2) = 0$, indem Sie z_1 als einzige verallgemeinerte Koordinate wählen.

(b) Geben Sie die Lagrange-Gleichung der *zweiten* Art an für den Fall, dass das Seil eine homogene Massendichte ρ pro Längeneinheit besitzt, und lösen Sie diese.

Aufgabe 16. Lagrange-Gleichungen erster Art (3 Punkte)

Betrachten Sie die Wirkung der Form

$$\bar{S}^{(\mathbf{q}_2,t_2)}_{(\mathbf{q}_1,t_1)}[\mathbf{q},\boldsymbol{\lambda}] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) + \sum_{m=1}^{z} \lambda_m(t) f_m(\mathbf{q}(t), t) \right]$$

als Funktional von $\mathbf{q}$ und $\boldsymbol{\lambda} \equiv \{\lambda_m\}$. Zeigen Sie explizit, dass sowohl die Lagrange-Gleichungen der ersten Art als auch die entsprechende Zwangsbedingungen aus dem Variationprinzip

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} (\delta \bar{S})^{(\mathbf{q}_2,t_2)}_{(\mathbf{q}_1,t_1)}[\mathbf{q},\boldsymbol{\lambda}] = 0$$

hergeleitet werden können, wobei die Variation $(\delta\mathbf{q})(t)$ den üblichen Einschränkungen $(\delta\mathbf{q})(t_1) = (\delta\mathbf{q})(t_2) = \mathbf{0}$ unterworfen ist und die Variation $(\delta\boldsymbol{\lambda})(t)$ zu den Anfangs- und Endzeiten t_1 bzw. t_2 keinerlei Einschränkungen unterworfen ist.