Aufgabenblatt 8, Abgabe: 09. 01. 2012

Aufgabe 23. Der Drehimpuls (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ relativ zu einem Inertialsystem. Das Teilchen befindet sich in einem sphärisch symmetrischen Potential $V(x)$, wobei $x \equiv |\mathbf{x}|$ definiert wird. Es wird nun eine Transformation auf sphärische Koordinaten (x, ϑ, φ) durchgeführt.

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(x, \vartheta, \varphi, \dot{x}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ des Teilchens und die entsprechenden verallgemeinerten Impulse an.

(b) Geben Sie die Hamilton-Funktion H des Teilchens als Funktion von (x, ϑ, φ) und den zu (x, ϑ, φ) konjugierten Impulsen $(p_x, p_\vartheta, p_\varphi)$ an.

Aus der Newton'schen Mechanik wissen wir bereits, dass der Drehimpuls $\mathbf{L}$ des Teilchens und daher auch $\mathbf{L}^2$ erhalten sind und deshalb eine zentrale Rolle bei der Beschreibung der Dynamik des Teilchens spielen.

(c) Bestimmen Sie $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}^2$ als Funktion von (x, ϑ, φ) und $(p_x, p_\vartheta, p_\varphi)$.

(d) Bestimmen Sie H als Funktion der Variablen x, p_x und $\mathbf{L}^2$.

Aufgabe 24. Energieerhaltung? (6 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das Jacobi-Integral und die Hamilton-Funktion erhalten sind und die Energie des Systems darstellen, falls $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ gilt und die eventuellen Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeitvariablen abhängen.
Zur Illustration betrachten wir einen Massenpunkt (Masse m), der reibungslos entlang des Kreisrandes $\{\mathbf{x} \mid |\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}| = l\}$ gleiten kann, wobei $\mathbf{X}(t)$ und l den Mittelpunkt und den Radius des Kreises darstellen. Der Kreis soll sich in der $\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2$-Ebene bewegen, so dass $\mathbf{X} = X_1\hat{\mathbf{e}}_1 + X_2\hat{\mathbf{e}}_2$ und $\mathbf{x} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2$ gilt; die Bewegung $\mathbf{X}(t)$ wird vorgegeben. Man kann die Bewegung des Massenpunkts also mit Hilfe einer einzelnen verallgemeinerten Koordinate φ beschreiben: $\mathbf{x}(\varphi, t) = \mathbf{X}(t) + l[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_2]$.

(a) Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die Energie E des Massenpunkts an.

(b) Wählen Sie nun $L(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2$ mit $\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{x}(\varphi, t)$, und leiten Sie aus dieser Lagrange-Funktion Ausdrücke für den verallgemeinerten Impuls und die Hamilton-Funktion ab.

(c) Wie muss man $\mathbf{X}(t)$ wählen, damit die Hamilton-Funktion für alle möglichen physikalischen Bahnen erhalten ist? Ist dann auch die Energie erhalten? Falls nein: Erklären Sie dies. Falls ja: Hätten Sie dies auch aufgrund allgemeiner Überlegungen vorhersehen können?

Aufgabe 25. Rotierendes Koordinatensystem (8 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m mit den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x}$, die relativ zu einem Inertialsystem gemessen werden. Das Teilchen befindet sich in einem sphärisch symmetrischen Potential $V(x)$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|$. Es wird nun eine Transformation auf verallgemeinerte Koordinaten $\mathbf{q}$ durchgeführt, wobei die Variablen $\mathbf{q}$ die Lage des Teilchens in einem Koordinatensystem beschreiben, das relativ zum Inertialsystem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die $\hat{\mathbf{e}}_3$-Achse rotiert: $\mathbf{x} = R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{q}$ mit $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\omega} t$ und $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{e}}_3$.

(a) Zeigen Sie: $\dot{\mathbf{x}} = R(\boldsymbol{\alpha})(\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q})$. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ des Teilchens in verallgemeinerten Koordinaten und leiten Sie hieraus die folgende Bewegungsgleichung ab:

$$m\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}) \, . \tag{1}$$

Bestimmen Sie die mit $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ assoziierte Hamilton-Funktion und die entsprechenden Hamilton-Gleichungen.

Der zweite Term im rechten Glied von (1) stellt die Coriolis-Kraft dar (Aussprache: Korīōlī, *nicht* Koriṓlis), der dritte Term ist die Zentrifugalkraft.

(b) Erklären Sie, warum Winde auf der nördlichen (bzw. südlichen) Halbkugel nach rechts (bzw. links) abgebogen werden. Betrachten Sie nun ein Teilchen, welches im Schwerkraftfeld der Erde mit der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$ hundert Meter senkrecht über einem Punkt P der Erdoberfläche am Äquator losgelassen wird. In welcher Entfernung/Richtung von P trifft es (näherungsweise im reibungsfreien Fall) auf?

Transformieren Sie nun auf sphärische Koordinaten (q, ϑ, φ) mit $\mathbf{q} \equiv q\hat{\mathbf{e}}_q$ und dem Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}_q = (\sin(\vartheta)\cos(\varphi), \sin(\vartheta)\sin(\varphi), \cos(\vartheta))$.

(c) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(q, \vartheta, \varphi, \dot{q}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ und die entsprechenden verallgemeinerten Impulse. Bestimmen Sie die mit $L(q, \vartheta, \varphi, \dot{q}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$ assoziierte Hamilton-Funktion H. Ist H erhalten? Ist H gleich der Energie?