Aufgabenblatt 9, Abgabe: 16. 01. 2012

Aufgabe 26. Poisson-Klammern des Drehimpulses (3 Punkte)

Betrachten Sie ein einzelnes Teilchen der Masse m im Phasenraum $\{(\mathbf{x},\mathbf{p})\}$, wobei $\mathbf{x}$ die kartesischen Koordinaten des Teilchens relativ zu einem Inertialsystem darstellt und $\mathbf{p}$ der entsprechende (kinetische) Impuls ist. Der (kinetische) Drehimpuls ist somit durch $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ definiert. Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{L_i, x_j\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$, $\{L_i, p_j\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$, $\{L_i, L_j\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$ und $\{\mathbf{L}^2, L_i\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$. Was fällt Ihnen bei den ersten drei Klammern auf?

Aufgabe 27. Das Kepler-Problem (9 Punkte)

Betrachten Sie das Kepler-Problem,

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(x) \ , \ \ V(x) = -\frac{\mathcal{G}\mu M}{x}.$$

(a) Zeigen Sie explizit mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ und der Lenz'sche Vektor $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\mu}\mathbf{p} \times \mathbf{L} + V(x)\mathbf{x}$$

Erhaltungsgrößen des Systems darstellen.

(b) Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{L_k, a_l\}$ und $\{a_k, a_l\}$ $(k, l \in \{1, 2, 3\})$.

Aufgabe 28. Das schwingende Dreieck (8 Punkte + 3 Bonuspunkte)

Wir betrachten drei Massenpunkte (jeweils der Masse m) in der $x_1 - x_2$-Ebene, die durch drei ideale Federn (jeweils mit der Ruhelänge ℓ und der Federkonstanten $m\omega_0^2$) miteinander verbunden sind. Die Bewegung des k-ten Massenpunkts $(k = 1, 2, 3)$ ist insofern eingeschränkt, als er sich nur entlang der Halbachse $\lambda\hat{\mathbf{a}}_k$ mit $\lambda \geq 0$ und

$$\hat{\mathbf{a}}_k \equiv \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{2\pi}{3}\left(k - \frac{3}{4}\right)\right] \\ \sin\left[\frac{2\pi}{3}\left(k - \frac{3}{4}\right)\right] \end{pmatrix} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

bewegen kann; diese Bewegung erfolgt reibungslos. Wir bezeichnen die kartesischen Koordinaten des k-ten Teilchens in der $x_1 - x_2$-Ebene als $\mathbf{x}_k(t) = (x_{k1}(t), x_{k2}(t))$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}_k^{(0)} = \frac{\ell}{\sqrt{3}}\,\hat{\mathbf{a}}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ eine mögliche Gleichgewichtslage der Teilchen darstellt.

Wir führen nun verallgemeinerte Koordinaten $(q_1, q_2, q_3) \equiv \mathbf{q}$ mittels $\mathbf{x}_k(t) \equiv \mathbf{x}_k^{(0)}[1 + q_k(t)]$ ein und entwickeln den Zustand $\{\mathbf{x}_k(t)\}$ um diese Gleichgewichtslage.

(b) Zeigen Sie für $k \neq l$: $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l| = \ell\left[1 + \frac{1}{2}(q_k + q_l) + \mathcal{O}(|\mathbf{q}|^2)\right]$.

(c) Zeigen Sie, dass in der Näherung für *kleine Schwingungen* um die Gleichgewichtslage für die Lagrange-Funktion gilt:

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \tfrac{1}{6}m\ell^2\left[\dot{\mathbf{q}}^2 - \tfrac{3}{2}\omega_0^2(\mathbf{q}^2 + q_1q_2 + q_2q_3 + q_3q_1)\right] \ .$$

(d) Geben Sie für den Fall kleiner Schwingungen die Lagrange-Gleichungen an.

(e) **Bonuspunkte:** Bestimmen Sie die Normalschwingungen und Eigenfrequenzen des Systems. Skizzieren Sie die Normalschwingungen.