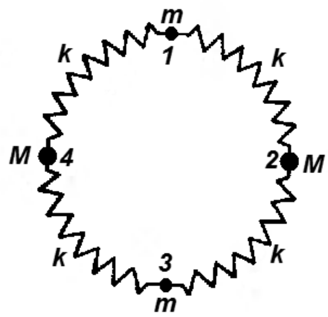
Aufgabenblatt 10, Abgabe: 23. 01. 2012

Aufgabe 29. Der schwingende Kreis (11 Punkte)

Wir betrachten vier Massenpunkte (1. und 3. Massenpunkte der Masse m, 2. und 4. Massenpunkte der Masse M) in der $x_1 - x_2$-Ebene, die sich auf dem sterren Kreis mit dem Radius R reibungslos bewegen können. Die Massen sind entlang den Kreisumfang durch vier ideale Federn mit der Federkonstanten k miteinander verbunden. In der Gleichgewichtslage des Systems sind die Längen aller Federn gleich.



(a) Geben Sie für den Fall kleiner Auslenkungen von der Gleichgewichtslage die Lagrange-Funktion des Systems und die entsprechende Lagrange-Gleichungen an.

(b) Bestimmen Sie aus dem Ansatz $\mathbf{q}^{(\mu)}(t) = \mathbf{q}_0^{(\mu)} \sin(\omega t)$ die Normalschwingungen und Eigenfrequenzen des Systems. Ist die Gleichgewichtslage des Systems stabil?

(c) Skizzieren Sie die Normalschwingungen.

(d) Bestimmen Sie gemäß der Vorlesung die Matrix B' (für die $\ddot{\mathbf{q}}'' = -B'\mathbf{q}''$ gilt) und zeigen Sie, dass $\mathbf{q}_0'' = (1, \sqrt{M/m}, 1, \sqrt{M/m})$ ein Eigenvektor von B' ist. Welchem Eigenvektor des ursprunglichen Problems entspricht $\mathbf{q}_0''$? Geben Sie explizit die Zeitabhängigkeit der entsprechenden Bewegungung des Systems an.

Aufgabe 30. Transformationen im Phasenraum (9 Punkte)

Wir betrachten ein einfaches eindimensionales System, das im Phasenraum durch die Variablen (q, p) beschrieben wird; es gilt $\{q, p\} = \delta_{kl}$. Wir führen nun einige Transformationen der Form $(q, p) \to (\bar{q}, \bar{p})$ durch. Untersuchen Sie für die folgenden Transformationen, ob bzw. für welche (α, β, γ)-Werte sie die fundamentalen Poisson-Klammern invariant lassen und ob bzw. für welche (α, β, γ)-Werte sie eine Berührungstransformation darstellen:

(i) $\bar{q} = \ln[1 + \sqrt{q}\cos(p)] \quad , \quad \bar{p} = \alpha[1 + \sqrt{q}\cos(p)]\sqrt{q}\sin(p)$

(ii) $\bar{q} = \ln[q^{-1}\sin(p)] \quad , \quad \bar{p} = \alpha q \cot(p)$

(iii) $\bar{q} = q^{\alpha}\cos(\beta p) \quad , \quad \bar{p} = \gamma q^{\alpha}\sin(\beta p) \quad .$

Geben Sie die entsprechende erzeugende Funktion $F_3(p, \bar{q}, t)$ explizit an, falls Sie der Meinung sind, dass die Transformation eine Berührungstransformation darstellt.