Aufgabenblatt 11, Abgabe: 30. 01. 2012

Aufgabe 31. Infinitesimale Berührungstransformation (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die durch die erzeugende Funktion $F_2(q_1, q_2, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = q_1\bar{p}_1 + q_2\bar{p}_2 + \varepsilon(q_1 q_2 + \bar{p}_1\bar{p}_2)$ (mit $\varepsilon \to 0$) bestimmte infinitesimale Berührungstransformation einer Drehung im Phasenraum entspricht (in führender Ordnung in ε).

Aufgabe 32. Hamilton-Jacobi-Formalismus (7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Bahn $\mathbf{x}(t)$ des dreidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2\mathbf{x}^2$$

durch Lösen der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Berechnen Sie dazu das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

elementar.

(b) Geben Sie die Lösung auch im anisotropen Fall an, konkret für

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} B \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \delta & 0 \\ \delta & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33. Invarianz der allgemeinen Poisson-Klammer (3 Punkte)

Die *fundamentalen* Poisson-Klammern sind bekanntlich invariant unter beliebigen (eventuell zeitabhängigen) Berührungstransformationen $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}})$. Zeigen Sie ausgehend von diesem Ergebnis, dass auch die allgemeine Poisson-Klammer $\{A, B\}$ invariant unter solchen Transformationen ist. Genauer formuliert: Seien $A(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ und $B(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ zwei Observablen in den ursprünglichen Variablen und

$$\bar{A}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \equiv A(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t),\, \mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), t) \quad , \quad \bar{B}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \equiv B(\mathbf{q}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t),\, \mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t), t)$$

die entsprechenden Ausdrücke in den neuen Variablen; zeigen Sie dann: $\{\bar{A}, \bar{B}\}_{\bar{\mathbf{q}},\bar{\mathbf{p}}} = \{A, B\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$.

Aufgabe 34. $x - y$ **Lorentz-Boost** (6 Punkte)

(a) In Aufgabe 30 Theo1 wurde die Lorentz-Transformation in der $\hat{\mathbf{e}}_1$-Richtung betrachtet. Finden Sie explizit die entsprechende Matrix für die Transformation in der $\hat{\mathbf{e}}_2$-Richtung.

(b) Führen Sie jetzt Lorenz-Boosts in die $\hat{\mathbf{e}}_1$- und $\hat{\mathbf{e}}_2$-Richtungen hintereinander aus. Kann das Ergebnis als Lorentz-Boost dargestellt werden?

(c) Führen Sie die Lorenz-Boosts mit (i) $-v_1\hat{\mathbf{e}}_1$, dann (ii) $-v_2\hat{\mathbf{e}}_2$, dann (iii) $-v_1\hat{\mathbf{e}}_1$ aus. Warum kann dieses Ergebnis als Lorentz-Boost dargestellt werden? Bestimmen Sie die resultierende Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{\text{ges}}$. Unter welcher Bedingung bildet $\mathbf{v}_{\text{ges}}$ einen Winkel von 45 Grad mit der $\hat{\mathbf{e}}_1$-Achse?