Aufgabenblatt 12, Abgabe: 06. 02. 2012

Aufgabe 35. Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern (6 Punkte)

Zeigen Sie explizit, dass die fundamentalen Poisson-Klammern unter Berührungstransformationen mit erzeugender Funktion $F_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t)$ invariant sind.

Aufgabe 36. Der Doppler-Effekt (4 Punkte)

Ein Polizist behauptet, ein Autofahrer sei mit überhöhter Geschwindigkeit durch Rot ($\lambda = 650$ nm) gefahren. Der Autofahrer behauptet, er habe Grün ($\lambda = 530$ nm) gesehen. Nehmen wir an, beide haben Recht.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Autofahrers beim Blick (in Fahrtrichtung) auf die Ampel.

Nehmen wir nun an, der Autofahrer sieht die Ampel in einer Seitenstraße und zwar aus einer Richtung, die genau senkrecht auf seiner Geschwindigkeitsrichtung steht. Obwohl die Ampel grün ist, sieht der Autofahrer dieses Mal Rot.

(b) Bestimmen Sie wieder die Geschwindigkeit des Autofahrers beim Blick auf die Ampel.

Aufgabe 37. Maxwell-Gleichungen in 4-Schreibweise (5 Punkte)

Zeigen Sie explizit, dass das skalare Potential Φ und das Vektorpotential $\mathbf{A}$ zu einem 4-Vektor, dem 4-Potential $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$, kombiniert werden können:

(a) Leiten Sie aus inhomogenen Maxwell-Gleichungen ab: $\frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu = \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)$.

(b) Welche Zusatzbedingung ist nötig, damit das 4-Potential A^μ sich wie ein 4-Vektor transformiert?

(c) Warum muss man dabei nicht die homogenen Maxwell-Gleichungen berücksichtigen?

Aufgabe 38. Der Lorentz-Boost und elektromagnetische Felder (5 Punkte)

Wie aus der Vorlesung bekannt, kann der (antisymmetrische) elektromagnetische Feldstärketensor durch die elektromagnetischen Felder ausgedrückt werden: $F^{i0} = E_i$, $F^{ij} = -c\varepsilon_{ijk}B_k$. Als echter Tensor wird er wie folgt transformiert:

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Wir betrachten nun die explizite Form des Lorentz-Boosts:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \mathbb{1}_3 + (\gamma-1)\hat{\boldsymbol{\beta}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie explizit das Transformationsverhalten der $\mathbf{E}$- und $\mathbf{B}$-Felder unter dieser Lorentz-Transformation und leiten Sie folgende Ausdrücke ab:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - (\gamma-1)(\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{E})\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - (\gamma-1)(\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{B})\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie zusätzlich für die Komponenten:

$$
\begin{aligned}
E'_{\parallel} &= E_{\parallel} & \qquad B'_{\parallel} &= B_{\parallel} \\
\mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp} & \qquad \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_{\perp}
\end{aligned}
$$