



**Aufgabe 39. Relativistisches Teilchen im Magnetfeld (6 Punkte)**

Wir betrachten ein Teilchen der Ruhemasse  $m_0$  und der Ladung  $q$  in einem räumlich homogenen, zeitunabhängigen Magnetfeld  $\mathbf{B}$ . Der kinetische Impuls  $\boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$  und die Energie  $\mathcal{E} = \gamma_u m_0 c^2$  des Teilchens erfüllen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

Die Anfangsbedingung lautet  $\mathbf{u}(0) \equiv \mathbf{u}_0$  und  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ . Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie  $\mathbf{x}(t)$ .

**Aufgabe 40. Der relativistische harmonische Oszillator (14 Punkte + 6 Bonuspunkte)**

Die relativistische Variante des harmonischen Oszillators wird durch die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = -m_0\omega^2\mathbf{x} \quad , \quad \boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (1)$$

beschrieben und ließe sich in der Elektrodynamik mit Hilfe von Potentialen  $q\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m_0\omega^2\mathbf{x}^2$  und  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  realisieren.

- (a) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls  $\mathbf{L} \equiv \mathbf{x} \times \boldsymbol{\pi}$  und die Gesamtenergie  $\mathcal{E}_g \equiv \gamma_u m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0\omega^2\mathbf{x}^2$  des Oszillators erhalten sind. Verwenden Sie bei Bedarf  $\gamma_u m_0 c^2 = \sqrt{\boldsymbol{\pi}^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ .

Als Spezialfall betrachten wir nun eine Anfangsbedingung der Form  $\mathbf{x}(0) = x_1(0)\hat{\mathbf{e}}_1$  mit  $\boldsymbol{\pi}(0) = \pi_1(0)\hat{\mathbf{e}}_1$ , so dass sich der allgemeine dreidimensionale Oszillator (1) effektiv zu einem eindimensionalen Oszillator reduziert.

- (b) Zeigen Sie für diesen eindimensionalen Fall:  $(\pi_1)^2 = \frac{1}{c^2} \left[ (\mathcal{E}_g - \frac{1}{2}m_0\omega^2 x_1^2)^2 - m_0^2 c^4 \right]$  und  $\gamma_u = \frac{1}{m_0 c^2} \left[ \mathcal{E}_g - \frac{1}{2}m_0\omega^2 x_1^2 \right]$ , und leiten Sie hieraus mit der Notation  $\varepsilon \equiv \mathcal{E}_g / m_0 c^2$  ab:

$$\frac{1}{c} \frac{dx_1}{dt} = \pm \sqrt{1 - \left[ \varepsilon - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega x_1}{c} \right)^2 \right]^{-2}}.$$

- (c) Zeigen Sie, dass die Umkehrpunkte der eindimensionalen Oszillation bei  $x_1 = \pm x_{\max}$  mit  $x_{\max} \equiv \frac{c}{\omega} \sqrt{2(\varepsilon - 1)}$  auftreten. Zeigen Sie mittels einer Substitution  $x \equiv x_{\max} \xi$  für die Periode  $T$  der harmonischen Schwingung:

$$\omega T = 4\sqrt{2} \int_0^1 d\xi \frac{\varepsilon - (\varepsilon - 1)\xi^2}{\sqrt{(1 - \xi^2) [\varepsilon + 1 - (\varepsilon - 1)\xi^2]}}. \quad (2)$$

(d) Bestimmen Sie  $\omega T$  als Funktion von  $\varepsilon > 1$  nun

- (i) *asymptotisch*, indem Sie analytisch  $\omega T \sim 2\pi$  für  $\varepsilon \downarrow 1$  und  $\omega T \sim 4\sqrt{2\varepsilon}$  für  $\varepsilon \rightarrow \infty$  nachweisen,
- (ii) *geschätzt*, indem Sie die Divergenz des Integranden durch eine geeignete Variabelsubstitution eliminieren und die Trapezregel mit 2 Stützstellen anwenden,
- (iii) *numerisch*, indem Sie rechnergestützt eine Skizze anfertigen,
- (iv) *exakt*, indem Sie das Integral in (2) durch Standardformen der elliptischen Integrale ausdrücken.

Vergleichen Sie die Ergebnisse von (i)-(iii) miteinander.

**Fragestunde am Mittwoch, dem 15.02.2012:**

Bitte senden Sie Fragen zur Vorlesung bis zum Montag, dem 13.02.2012, 14<sup>00</sup> Uhr an Frau Dr. E. Gorelik (gorelike@uni-mainz.de).