



**Aufgabe 1. Gauß'scher Satz** (3.5 Punkte)

Verifizieren Sie den Gauß'schen Satz: 
$$\int_{\partial \mathcal{D}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F} = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{F}$$

für den Spezialfall  $\mathbf{F} = (4x_1x_3, -x_2^2, x_2x_3)$ , wobei  $\partial \mathcal{D}$  die Oberfläche des Kubus  $\mathcal{D}$ , eingeschlossen von den Ebenen  $x_i = 0, x_i = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ist.

**Aufgabe 2. Stokes'scher Satz** (3.5 Punkte)

Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz: 
$$\oint_{\partial \mathcal{F}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

für den Spezialfall  $\mathbf{A} = (2x_1 - x_2, -x_2x_3^2, -x_2^2x_3)$ , wobei  $\mathcal{F}$  die obere Hälfte ( $x_3 \geq 0$ ) der Kugeloberfläche  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  und  $\partial \mathcal{F}$  der Rand von  $\mathcal{F}$  ist. Wie hängt im Allgemeinen die Ausrichtung des Normalvektors auf der Fläche  $\mathcal{F}$  mit dem Umlaufsinn der Kurve  $\partial \mathcal{F}$  zusammen?

**Aufgabe 3. Exakte Differentiale** (6 Punkte)

Ein Differential  $dF = \sum_{\ell=1}^d c_\ell(\mathbf{x}) dx_\ell$  mit  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  heißt *exakt*, wenn alle  $c_\ell(\mathbf{x})$  stetig differenzierbar sind und für alle  $(\ell, m)$ :

$$\left( \frac{\partial c_\ell}{\partial x_m} \right)_{\{x_k | k \neq m\}} = \left( \frac{\partial c_m}{\partial x_\ell} \right)_{\{x_k | k \neq \ell\}}$$

gilt, wobei die Bezeichnung  $\{x_k | k \neq m\}$  andeutet, dass die entsprechenden Variablen bei der Differentiation nach  $x_m$  konstant gehalten werden. Falls  $dF$  nicht exakt ist, aber  $\gamma(\mathbf{x})dF$  wohl, heißt  $\gamma(\mathbf{x})$  ein integrierender Faktor. Man kann leicht zeigen, dass  $dF$  dann und nur dann exakt ist, wenn für jeden geschlossenen Integrationsweg  $\oint dF = 0$  gilt.

(a) Bestimmen Sie, ob die folgenden Differentiale exakt sind:

1.  $dF = \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} dx_2$ .
2.  $dF = (x_2 - x_1^2) dx_1 + (x_1 + x_2^2) dx_2$ .
3.  $dF = (2x_2^2 - 3x_1) dx_1 - 4x_1x_2 dx_2$ .

Bestimmen Sie  $F(x_1, x_2)$ , falls das Differential exakt ist.

(b) Ist  $dF = x_1 dx_1 + \frac{x_1^2}{x_2} dx_2$  exakt? Wenn nicht, bestimmen Sie einen integrierenden Faktor.

(c) Bestimmen Sie den Wert des Wegintegrals

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} (10x_1^4 - 2x_1x_2^3) dx_1 - 3x_1^2x_2^2 dx_2$$

entlang des Weges  $x_1^4 - 6x_1x_2^3 = 4x_2^2$ .