



Aufgabe 4. Die Grundlösung der Laplace-Gleichung (7 Punkte)

Die Grundlösung der Laplace-Gleichung ist die Lösung der Gleichung

$$\Delta U(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d), \quad (1)$$

wobei $\Delta = \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2}$ den d -dimensionalen Laplace-Operator bezeichnet. Hier beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Fall ($d = 3$) und nehmen an, dass $U(\mathbf{x})$ die Randbedingung $U \rightarrow 0$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ erfüllt. Aufgrund der sphärischen Symmetrie des Problems beschränken wir uns des Weiteren auf Lösungen der Form $U(\mathbf{x}) = u(x)$ mit $x \equiv |\mathbf{x}|$.

- (a) Leiten Sie aus (1) eine gewöhnliche Differentialgleichung für $u(x)$ her. Zeigen Sie, dass die Lösung die Form $u(x) = A \frac{1}{x}$ hat.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass $A = \frac{1}{4\pi}$ und somit $\Delta(-\frac{1}{4\pi x}) = \delta(\mathbf{x})$ gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

eine Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}, t)$ zu der Randbedingung $\Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ ist.

- (d) Nehmen wir nun an, es gäbe eine weitere Lösung $\Phi_2 \neq \Phi_1$ der Poisson-Gleichung zur Randbedingung $\Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Leiten Sie unter Anwendung des Gauß'schen Satzes auf $\nabla \cdot \frac{1}{2} w^2(\mathbf{x})$ mit $w(\mathbf{x}) = \Phi_2(\mathbf{x}) - \Phi_1(\mathbf{x})$ und $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$ einen Widerspruch her und schließen Sie auf die Eindeutigkeit der Lösung der Poisson-Gleichung (zur genannten Randbedingung).

Aufgabe 5. Die Wellengleichung der Akustik (8 Punkte)

Mit den aus der Vorlesung bekannten Grundgleichungen der Strömungsmechanik

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p = \mathbf{f} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3)$$

soll die Wellengleichung der Akustik

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\rho - \Delta \delta\rho = 0 \quad (4)$$

für die Dichteschwankung $\delta\rho(\mathbf{x}, t)$ hergeleitet werden.

- (a) Betrachten Sie ein ruhendes Fluid ohne äußere Krafteinwirkung, das eine kleine Schwankung aus seiner Gleichgewichtslage ($p_0, \rho_0, \mathbf{v}_0 \equiv 0$) erfährt:

$$p = p_0 + \delta p, \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho, \quad \mathbf{v} = \delta \mathbf{v} \quad \text{wobei} \quad \delta p \ll p_0, \quad \delta \rho \ll \rho_0.$$

Beginnen Sie mit der Linearisierung von Euler- und Kontinuitätsgleichung. Behalten Sie in der weiteren Rechnung immer nur lineare Terme. Hieraus lässt sich mit Hilfe der Materialgleichung die Wellengleichung (4) ableiten. Mit welchem Term wird die Schallgeschwindigkeit c identifiziert?

Hinweis: Für einen linearisierten Zusammenhang zwischen Dichte und Druck kann eine Taylor-Entwicklung der allgemeinen Materialgleichung $p \equiv p(\rho)$ um $\rho = \rho_0$ verwendet werden.

- (b) Geben Sie eine nichttriviale Lösung $\delta \rho(\mathbf{x}, t) \equiv \delta \rho(x_1, t)$ der Wellengleichung (4) an.
- (c) Leiten Sie mit Hilfe Ihres Ausdrucks für c die Schallgeschwindigkeit von idealen Gasen her.
- (d) Berechnen Sie den numerischen Wert der Schallgeschwindigkeit von Stickstoff bei Zimmertemperatur.

Aufgabe 6. Nützliche Identitäten (5 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion f und ein Vektorfeld \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} & , & \quad \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A} : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 & , & \quad \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

- (a) $\nabla_{\mathbf{x}} \times [\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})]$
- (b) $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})]$
- (c) $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot [\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}(\mathbf{x})]$
- (d) $\nabla_{\mathbf{x}} \left[\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|} \right]$
- (e) $\partial_i \partial_j \frac{1}{r}$ für $r \neq 0$, wobei $r = \|\mathbf{x}\|$ und $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.