

Aufgabe 7. Poiseuille Strömung (10 Punkte)

Betrachten Sie die Strömung einer Flüssigkeit mit Viskosität η , die durch die Navier-Stokes-Gleichung

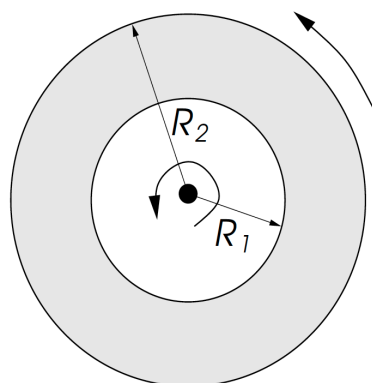
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p - \eta \Delta \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

beschrieben wird.

- Berechnen Sie das Strömungsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(y)$ eines stationären Flusses zwischen zwei festen Begrenzungen bei $y = \pm h$, der durch einen konstanten Druckgradienten $\nabla p = (-P, 0, 0)$ erzeugt wird. Die Reibung an den Randflächen sei als unendlich stark angenommen: $\mathbf{v}(\pm h) = \mathbf{0}$.
- Berechnen Sie analog zu (a) das Strömungsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(r)$, wenn der Fluss durch ein zylindrisches Rohr mit dem Radius a beschränkt wird. Für den Druckgradienten in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) gilt hier $\frac{\partial p}{\partial z} = -P$, $\frac{\partial p}{\partial r} = 0 = \frac{\partial p}{\partial \phi}$.
- Berechnen Sie für a) und b) jeweils den Zusammenhang von mittlerer Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} und Maximalgeschwindigkeit v_{\max} .

Aufgabe 8. Laminare Strömung zwischen konzentrischen Zylindern (10 Punkte)

Betrachten Sie zwei unendlich lange konzentrische Zylinder mit Radien $R_1 < R_2$, die mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 bzw. ω_2 um ihre Symmetrieachse rotieren. Zwischen ihnen befindet sich eine Newtonsche Flüssigkeit, deren Strömung der Navier-Stokes-Gleichung (1) genügt. Sie dürfen außerdem voraussetzen, dass das Geschwindigkeitsfeld nur azimuthale Komponenten hat.



- Berechnen Sie $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sowie $p(r)$ für eine inkompressible Flüssigkeit.
- Berechnen Sie $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sowie $p(r)$ für ein Fluid, dessen Zustandsgleichung $p(\rho)$ dem idealen Gasgesetz gehorcht.

- (c) Kontrollieren Sie die Ergebnisse von (a) und (b) für den Grenzfall $\omega_1 = \omega_2$ durch eine Rechnung im mitrotierenden Bezugssystem.
- (d) Beschreiben Sie qualitativ die Evolution des Geschwindigkeitsfeld im Fall einer kompressiblen Flüssigkeit, wenn man, ausgehend vom stationären Zustand, die Rotationsgeschwindigkeit des inneren Zylinders langsam erhöht.