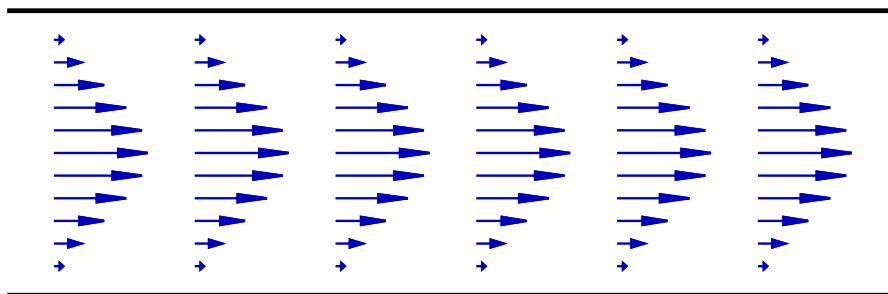




**Aufgabe 9. Nichtstationäre Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung** (20 Punkte)

Betrachten Sie die Strömung einer Newtonschen Flüssigkeit, ohne äußere Kräfte und mit homogener Druckverteilung:  $\mathbf{f} = \nabla p = \mathbf{0}$ , zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten im Abstand  $d$ , die jeweils senkrecht zu  $\hat{\mathbf{e}}_y$  ausgerichtet sind (bei  $y = \pm d/2$ ). Als Anfangsbedingung sei ein Strom in  $x$ -Richtung der Form  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = v_0(y) \hat{\mathbf{e}}_x$  gegeben.



Wir interessieren uns für Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p - \eta \Delta \mathbf{v} - \left( \frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{f} ; \quad (1)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (2)$$

deren Form im Ortsraum im Wesentlichen erhalten ist, während die Amplitude im Laufe der Zeit aufgrund der inneren Reibung abnimmt.

- (a) Welche Terme der Navier-Stokes-Gleichung (1) verschwinden unter den genannten Bedingungen (mit Beweis)? Wie lässt sich die resultierende Differentialgleichung

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \eta \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3)$$

im inkompressiblen Fall charakterisieren? Wieso tritt (z.B. zur Zeit  $t = 0$ ) kein „Auftrieb“ in Form vertikaler Beschleunigungen oder Druckdifferenzen auf, obwohl der Term  $\frac{1}{2} \rho \nabla \mathbf{v}^2$  dies nahelegen würde [Einsetzen von (2) in (1) bzw. Physik der Bernoulli-Gleichung]?

- (b) Nehmen Sie zunächst an, dass nur innere Reibung mit Viskosität  $\eta$  auftritt, die Flüssigkeit aber reibungsfrei an den Platten vorbeigleitet. Lösen Sie das Problem für die Anfangsbedingung  $v_0(y) = v_0 [1 + \cos(2\pi y/d)]$ . Wie klingt die Inhomogenität der Strömung ab?

*Hinweis: Machen Sie für die Bewegung im Schwerpunktsystem den Ansatz  $v_{rel}(t, y) = f(t)v_{rel}(0, y)$ , bestimmen Sie  $v_{rel}(0, y)$  aus  $v_0(y)$  und lösen Sie die aus der Navier-Stokes-Gleichung resultierende gewöhnliche Differentialgleichung für  $f(t)$ .*

- (c) Betrachten Sie jetzt den entgegengesetzten Grenzfall unendlicher Reibung an den Platten, also  $v(y = \pm d/2) = 0$  und eine Strömung, deren Betrag zur Mitte hin monoton ansteigt. Wie muss der Ansatz aus (b) modifiziert werden, so dass die Lösung der Form  $v(t, y) = v_0(y)f(t)$  die Randbedingung erfüllt? Wie groß ist jetzt die Zeitkonstante des Abklingens? Gibt es auch eine Lösung, bei der die zeitliche Abhängigkeit mit der aus (b) übereinstimmt?
- (d) Betrachten Sie nun eine laminare Strömung durch ein unendlich langes Rohr mit Radius  $R$ , ebenfalls mit unendlicher Grenzflächenreibung. Dabei soll (in Zylinderkoordinaten) gelten:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})f(t) \quad , \quad \mathbf{v}_0(r, \varphi, z) = v_0(r)\hat{\mathbf{e}}_z \quad \text{mit} \quad v_0 = 0 \quad \text{für} \quad r \geq R.$$

Leiten Sie für Eigenlösungen der Form  $v(t, r) = f(t)v(r)$  die Besselsche Differentialgleichung

$$r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \frac{\partial v}{\partial r} + (r^2 - n^2)v = 0 \tag{4}$$

her, bestimmen Sie den Parameter  $n$  und geben Sie die allgemeine zylindersymmetrische Lösung  $v(t, r)$  an.

- (e) Erläutern Sie, warum das Superpositionsprinzip in der Hydrodynamik nicht allgemein gilt.