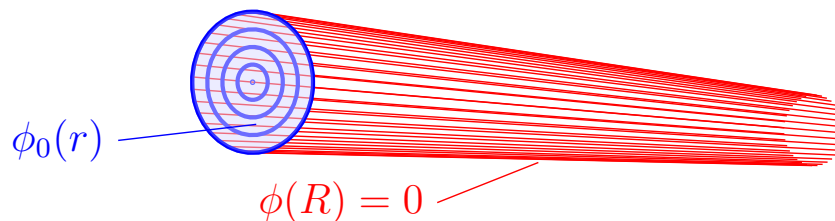


Aufgabe 10. Lösungen der Laplace-Gleichung im zylindrischen Hohlleiter (10 Punkte)

Betrachten Sie einen halbunendlich langen und perfekt leitfähigen Hohlzylinder mit Radius R . An seinem Ende ($z = 0$) sei durch Ringelektroden eine radialsymmetrische Potentialverteilung $\phi(r, \varphi, z = 0) = \phi_0(r)$ vorgegeben.



(a) Geben Sie $\phi(\mathbf{r})$ im Zylinder ($z > 0, r \leq R$) an.

(b) Betrachten Sie nun einen Zylinder endlicher Länge mit den Randbedingungen

$$\phi(r, \varphi, z = 0) = \phi_0(r), \quad \phi(r, \varphi, z = L) = \phi_L(r) \quad \text{wobei} \quad \phi_0(R) = \phi_L(R).$$

Berechnen Sie $\phi(\mathbf{r})$ im Zylinder.

(c) Formulieren Sie für die Geometrie aus b) die allgemeinste zulässige Potentialverteilung auf den Zylinderkappen und geben Sie (nur) die Struktur der Lösung an.

Aufgabe 11. Potentialbestimmung durch Spiegelladungen (7 Punkte)

Durch die Methode der Spiegelladungen ist es möglich das Potential von Ladungen im Umfeld eines perfekt leitenden Körpers zu bestimmen. Diese Methode soll nun für zwei Anordnungen angewendet werden.

(a) Bestimmen Sie das Potential einer Punktladung q , die bei $\mathbf{r}_q = a\hat{\mathbf{e}}_x$ ruht, wenn sich in der y - z -Ebene eine unendlich ausgedehnte, perfekt geerdete Metallplatte befindet. Welche Flächenladungsdichte $\sigma = E_n \epsilon_0$ wird auf der Platte erzeugt? Wie groß ist die gesamte influenzierte Flächenladung auf der Platte?

(b) Eine Punktladung q befindet sich im Gebiet G zwischen zwei konzentrischen, perfekt geerdeten Hohlkugeln mit den Radien $R < R'$; $R' \rightarrow \infty$. Bestimmen Sie das Potential in G , das die Poisson-Gleichung in G und Dirichlet-Randbedingungen auf ∂G erfüllt, wenn sich die Ladung im Abstand $r_q > R$ zum Mittelpunkt der inneren Kugel befindet.

(c) Wie muss das Ergebnis aus b) modifiziert werden, wenn die innere Kugel isoliert (aber dennoch leitend) ist und die Ladung Q trägt?

Aufgabe 12. Der Gaußsche Mittelwertsatz (3 Punkte)

Die Funktion $u(\mathbf{x})$ erfülle im Volumen V die Laplace-Gleichung $\Delta u(\mathbf{x}) = 0$. Beweisen Sie, dass für jeden Mittelpunkt \mathbf{x}_0 und für jede Kugel $K(\mathbf{x}_0, R) = \{\mathbf{x}; |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < R\}$, die ganz in V liegt, gilt:

$$u(\mathbf{x}_0) = I(\mathbf{x}_0, R) := \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K(\mathbf{x}_0, R)} ds u(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Hinweis: zeigen Sie (anders als in der Vorlesung) zunächst, dass $\frac{\partial}{\partial R} I(\mathbf{x}_0, R) = 0$ und folgern Sie dann die Behauptung.