

Aufgabe 13. Greenfunktion in sphärischen Koordinaten (12 Punkte)

Es soll die Greenfunktion der Poisson-Gleichung in sphärischen Koordinaten hergeleitet werden.

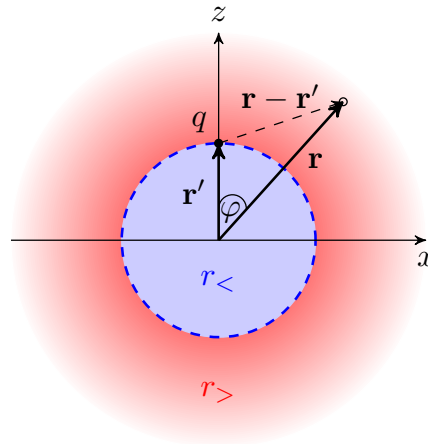


Abbildung 1: Koordinatensystem der Anordnung

Gegeben sei eine Punktladung q bei \mathbf{r}' . Das Koordinatensystem sei zunächst so gewählt, dass die z -Achse parallel zu \mathbf{r}' verläuft (s. Abbildung).

(a) Bestimmen Sie das Potential $\phi(\mathbf{r}) \equiv \phi(r, r', \varphi)$. Hierbei sind $r = |\mathbf{r}|$ und $r' = |\mathbf{r}'|$.

(b) Für zylindersymmetrische Potentiale hat die Laplace-Gleichung die allgemeine Lösung:

$$\phi(r, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos(\varphi)). \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass das Potential für diese Anordnung als

$$\phi(r, \varphi) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} q \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos(\varphi)) \quad (2)$$

$$r_{<} := \min(r, r') \quad r_{>} := \max(r, r') \quad (3)$$

dargestellt werden kann. Aus welchem Grund muss der Raum in zwei Teilbereiche unterteilt werden?

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Potential $\phi(r, 0)$ auf der z -Achse. Beginnen Sie mit Ihrer Lösung aus a). Wie kann das Ergebnis umgeschrieben werden damit Sie über Koeffizientenvergleich $\{a_l\}$ und $\{b_l\}$ in (1) ermitteln können?

(c) Betrachten Sie nun die Entwicklung

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l,l',m,m'} A_{ll'mm'}(r,r') Y_{l',m'}^*(\Omega') Y_{l,m}(\Omega) \quad (4)$$

in Kugelflächenfunktionen. Zeigen Sie, dass $A_{ll'mm'}(r,r') = A_{lm}(r,r') \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ gilt und leiten Sie folgende Differentialgleichung für die Koeffizienten her:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) A_{lm}(r,r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r-r'). \quad (5)$$

(d) Folgern Sie nun aus den Ergebnissen aus b) und c), dass

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega) \quad (6)$$

gilt.

Aufgabe 14. Elektro- und Magnetostatik (8 Punkte)

Das skalare Potential $\Phi(\mathbf{x})$ in der Elektrostatik und das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ in der Magnetostatik sind in der Coulomb-Eichung bekanntlich durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' \frac{\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

gegeben. Hierbei stellen ρ und \mathbf{j} die Ladungsdichte bzw. Stromdichte dar.

Wir betrachten nun eine Gesamtladung $Q \neq 0$ in einem begrenzten Raumbereich nahe dem Ursprung.

- (a) Bestimmen Sie $\Phi(\mathbf{x})$ für $x \rightarrow \infty$ bis einschließlich $\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Werten Sie das Ergebnis explizit aus für einen dünnen, homogen geladenen Stab ($-a < x_1 < a$) und einen homogen geladenen Kubus ($-a < x_i < a$, $i = 1, 2, 3$).

Betrachten wir nun einen stationären Strom $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ in einem begrenzten Raumbereich nahe dem Ursprung.

- (b) Bestimmen Sie $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ für $x \rightarrow \infty$ bis einschließlich $\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Was ist im Allgemeinen der führende Term in dieser Entwicklung? Wie verhält sich das Magnetfeld also typischerweise für $x \rightarrow \infty$? Bestimmen Sie das führende Verhalten von $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ für $x \rightarrow \infty$ explizit für einen rechteckigen Stromkreis in der x_1 - x_2 -Ebene:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{x}) = & j \left[\hat{\mathbf{e}}_1 (\delta(x_2 + b) - \delta(x_2 - b)) \Theta(a - |x_1|) \right. \\ & \left. + \hat{\mathbf{e}}_2 (\delta(x_1 - a) - \delta(x_1 + a)) \Theta(b - |x_2|) \right] \delta(x_3). \end{aligned}$$

Hierbei gilt $a, b > 0$. $\Theta(x)$ ist die Stufenfunktion.