Aufgabe 15. Multipolmomente (10 Punkte)

Es sollen Multipolmomente für verschiedene Anordnungen berechnet werden.

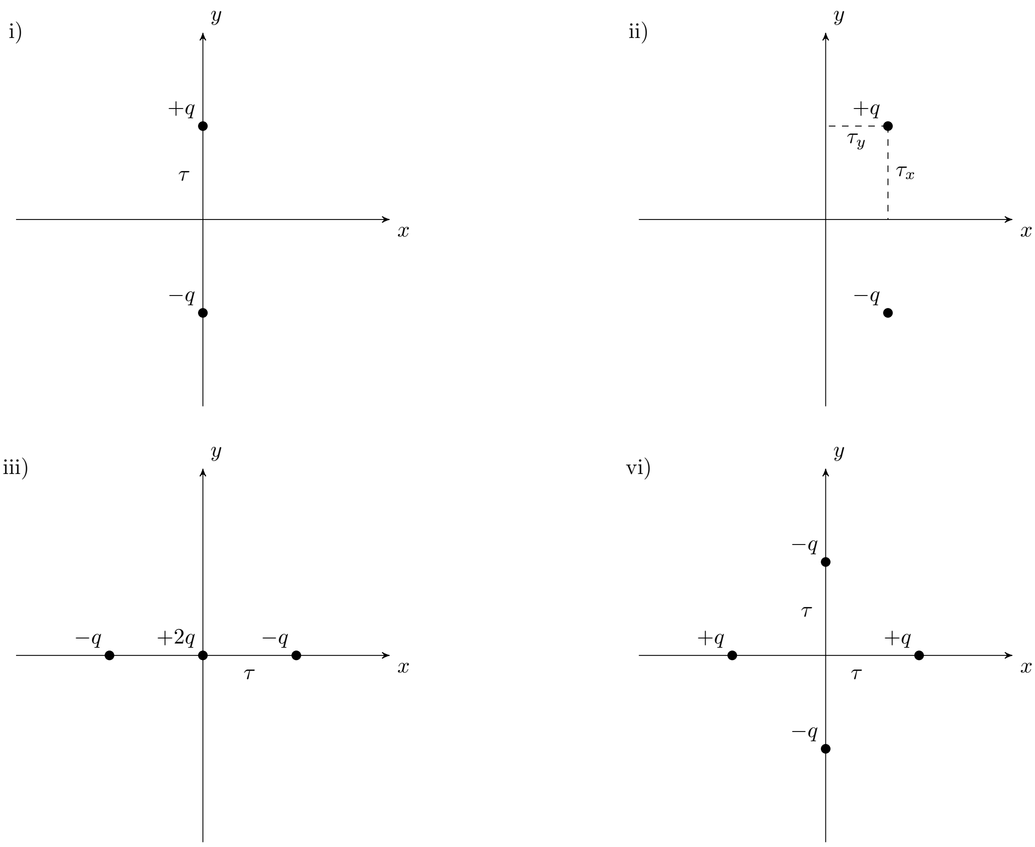
(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Ladungsverteilungen jeweils nur ein nichtverschwindendes Multipolmoment besitzen und geben Sie dieses an:

1. $\rho(\mathbf{r}) = q_0 \delta(\mathbf{r})$
2. $\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p}_0 \cdot \nabla \delta(\mathbf{r})$
3. $\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{6} q_{ij} \partial_i \partial_j \delta(\mathbf{r})$.

(b) Zeigen Sie, dass das Dipolmoment jeder spiegelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = \rho(-\mathbf{r})$ verschwindet.

(c) Zeigen Sie, dass für eine kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ die sphärischen Multipolmomente q_{lm} für $l = 1, 2, 3, ...$ verschwinden.

(d) Berechnen Sie die ersten drei Multipolmomente ($l = 0, 1, 2$) der folgenden Anordnungen von Punktladungen:



Aufgabe 16. Ladungsverteilung in Leitern in der Elektrostatik (10 Punkte)

Betrachten Sie einen dreidimensionalen homogenen leitenden Körper im Raumbereich $\mathcal{D}$, der eine stationäre Ladungsverteilung mit der Gesamtladung Q enthält; der Rand ∂D dieses Volumens entspricht der Oberfläche des Leiters.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Ladung Q an der Oberfläche des Leiters befindet und dort die Oberflächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}$, bildet, die gemäß $\sigma(\mathbf{x}) = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ mit der Normalableitung des skalaren Potentials verknüpft ist. Betrachten Sie außerdem den Spezialfall einer leitenden Kugel, $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} | \, |\mathbf{x}| \leq R\}$, und berechnen Sie $\Phi(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Man kann sich nun fragen, wie die Ladung Q sich über den Leiter verteilt, wenn er effektiv *zwei*- oder sogar *ein*dimensional ist. Man denke hierbei an eine dünne metallische Platte oder einen dünnen metallischen Stab. Bevor Sie weiterlesen: Was würden Sie aufgrund Ihrer physikalischen Intuition erwarten? Um die Frage nach der Ladungsverteilung in niederdimensionalen Leitern zu klären, verwenden wir das bekannte Ergebnis, das Sie hier *nicht* herzuleiten brauchen, für die Oberflächenladungsdichte eines leitenden Ellipsoids mit zwei gleichen Achsen im Vakuum, $\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{a_2^2} \leq 1 \right\}$:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi a_1 (a_2)^2} \left(\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{a_2^4} \right)^{-1/2} . \tag{1}$$

(b) Bestimmen Sie die Ladungsverteilung einer leitenden Kreisscheibe mit Radius a_2, indem Sie in (1) den Limes $a_1 \to 0$ durchführen.

(c) Bestimmen Sie die Ladungsverteilung eines dünnen, leitenden Stabs der Länge $2a_1$, indem Sie in (1) den Limes $a_2 \to 0$ durchführen.

(d) Welcher Anteil der Ladung befindet sich im Bereich $0.9\ a_2 < r < a_2$ der Kreisscheibe bzw. $0.9\ a_1 < |x_1| < a_1$ des Stabes (siehe Skizze)?