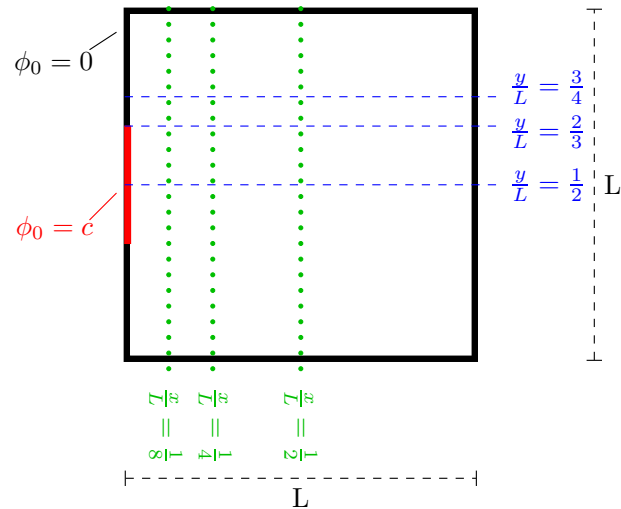




Aufgabe 17. Analytische Lösung der Laplace-Gleichung für ein Rechteck (10 Punkte + 10 Bonuspunkte)

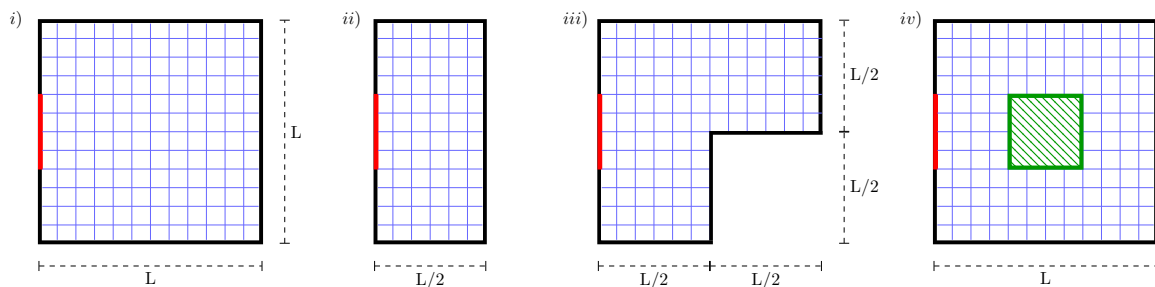
Lösen Sie die zweidimensionale Laplace-Gleichung in einem quadratischen Gebiet (Kantenlänge L) mit den Randwerten:

$$\phi_0 = \begin{cases} c = 1 & \text{für } x = 0, \frac{1}{3} \leq y/L \leq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



- Geben Sie die exakte Lösung $\phi(x, y)$ in Form einer Reihe an. Bestimmen Sie die Koeffizienten analytisch.
- Geben Sie das zugehörige elektrische Feld (exakt) an.
- Werten Sie den exakten Ausdruck für $\phi(x, y)$ aus (a) approximativ bei $x = 0$ aus, indem Sie die ersten N nichtverschwindenden Terme (mit Hilfe eines Computers) aufsummieren und stellen Sie das Ergebnis als Funktion von y graphisch dar (mindestens für $N = 1, 2, 3, 8, 50$).
- Betrachten Sie nun $\phi(x_i, y)$ als Funktion von y und plotten Sie jeweils Approximationen für $x_i/L = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$.
- Zeichnen Sie analoge Approximationen an $\phi(x, y_i)$ für $y_i/L = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\}$.
- Plotten Sie $E_x(x, y)$ und $E_y(x, y)$ entlang von ausgewählten Schnitte aus (d) und (e). Interpretieren Sie das Ergebnis für $y/L = \frac{3}{4}$.
- Welche qualitativen Änderungen der Ergebnisse erwarten Sie, wenn man die Kantenlänge (nur) in x -Richtung verdoppelt?
- Wie ließe sich das Randwertproblem physikalisch (approximativ) realisieren?

Aufgabe 18. Numerische Lösung der Laplace-Gleichung für ein Rechteck (10 Punkte + 10 Bonuspunkte)



Lösen Sie die Laplace-Gleichung (mit Dirichlet-Randbedingungen) auf einem Gebiet V nun numerisch in diskretisierter Form. Dabei dürfen Sie zunächst annehmen, dass V ein Rechteck ganz ausfüllt.

- Beschreiben Sie die gleichmäßige Aufteilung des Lösungsgebietes V in rechteckige Zellen mit Koordinaten (i, j) . Leiten Sie aus der Laplace-Gleichung $\Delta f(x, y) = 0$ eine Beziehung zwischen den Funktionswerten $f_{i,j}$ der (nicht notwendigerweise quadratischen) Zellen her. Wie lassen sich die Randbedingungen elegant einbeziehen?
- Geben Sie Algorithmen an für (i) die Jacobi-Iteration, (ii) die Gauß-Seidel-Iteration sowie (iii) das Schachbrett-Verfahren (*red-black ordering*). In welchen Fällen spielt die Reihenfolge der Updates eine Rolle?
- Implementieren Sie einen der Algorithmen (für quadratische oder rechteckige Zellen) auf dem Computer und lösen Sie das Problem von Aufgabe 17 (vgl. Fig. (i)) für verschiedene Diskretisierungen. Wie hängen die Ergebnisse von der Anzahl der Gitterzellen und der Anzahl der Iterationen ab? Vergleichen Sie das Potential mit Ergebnissen aus Aufgabe 17.
- Berechnen Sie auch das elektrische Feld, vergleichen Sie mit Aufgabe 17 und stellen Sie es geeignet zweidimensional dar.
- Interpretieren Sie die Lösung nun als Vektorpotential $\mathbf{A} = f_{i,j} \hat{e}_z$ und zeichnen Sie das zugehörige Magnetfeld.
- Untersuchen Sie auch andere Geometrien, wie in Abbildungen (ii) bis (iv) skizziert. Dabei soll das schraffierte Gebiet in (iv) leitend sein, aber isoliert gegenüber dem Rand des Quadrates; sein Potential gehört also zu den zu bestimmenden Größen.
- Testen Sie Strategien, um mit möglichst wenig Rechenzeit die bestmöglichen Ergebnisse zu erhalten.

*Hinweise: Sie sind frei in der Wahl einer Programmiersprache; allerdings müssen die Lösungsschritte einfachen mathematischen Operationen wie Multiplikation oder Addition entsprechen (d.h. ein Mathematica-Befehl wie `DSolve[pde, ...]` wäre nicht zulässig). Der Code muss auch vollständig dokumentiert sein und übersichtliche Klartext-Ausgaben (z.B. von der konvergierten Endkonfiguration) ermöglichen. Die Bearbeitung dieser Aufgabe darf in Zweiergruppen erfolgen; alle Ergebnisse sollen elektronisch bis zum **Abgabetermin (07.01.2013)** an die Übungsleiter gesendet werden, am besten in einer Form, die sich zur Präsentation auf dem Beamer eignet.*

Die Aufgabe hat Projektcharakter: Sie können die volle Punktzahl schon mit den Teilaufgaben (a)-(c) erreichen und können gerne auch andere Erweiterungen mit einreichen, jedoch **nicht** zur dritten Dimension.