Aufgabenblatt 09, Abgabe: 07.01.2013

Aufgabe 19. Über hyperbolische Bewegung und zwei Bärte (10 Punkte)

Betrachten Sie zwei Inertialsysteme K und K', wobei K' die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zu K hat. Wir wählen die x_1- und x_1'-Achsen von K und K' parallel zur Geschwindigkeit: $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_1' = \hat{\mathbf{v}}$.

(a) Leiten Sie aus dem relativistischen Transformationsgesetz für Geschwindigkeiten das folgende Transformationsgesetz für Beschleunigungen ab:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x_1'}{(dt')^2} \Bigg/ \left[\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}\frac{dx_1'}{dt'}\right)\right]^3 \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c}\,.$$

Wir betrachten nun einen Körper, der zur Zeit $t = 0$ im Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Inertialsystems K ruht. Für $t \geq 0$ wird der Körper beschleunigt in $\hat{\mathbf{e}}_1$-Richtung; die Größe der Beschleunigung ist hierbei konstant (und gleich a) im jeweiligen Ruhesystem des Körpers.

(b) Zeigen Sie, dass die dimensionslose Geschwindigkeit $\beta = \frac{dx_1}{d(ct)}$ des Körpers die Gleichung $\frac{d\beta}{dt} = \frac{a}{c}(1-\beta^2)^{3/2}$ erfüllt, und leiten Sie hieraus für die x_1-Koordinate und die Eigenzeit des Körpers ab:

$$\beta(t) = \left[1+\left(\frac{c}{at}\right)^2\right]^{-1/2}, \quad x_1(t) = \sqrt{c^2t^2+\frac{c^4}{a^2}} - \frac{c^2}{a} \quad , \quad \tau(t) = \frac{c}{a}\,\mathrm{arsinh}\left(\frac{at}{c}\right)\,.$$

Erklären Sie den Namen „hyperbolische Bewegung“.

Als Anwendung betrachten wir Einsteins Theorem über das Zurückbleiben beschleunigter Uhren („Zwillingsparadoxon“): Zwei (männliche) Zwillinge trennen sich zur Zeit $t = 0$; der eine verbringt seine Zeit ruhend im Ursprung des Inertialsystems K, der andere fliegt mit einer Rakete zu einem (einen Abstand L entfernten) Stern hin und her, wobei die (in seinem jeweiligen Ruhesystem gemessene) Beschleunigung betragsmäßig stets konstant ist (das erste und letzte Viertel der Reise sei die Beschleunigung $+a$, das zweite und dritte Viertel $-a$).

(c) Um wieviel jünger ist der Astronaut als sein Bruder, wenn er am Ende seiner Reise an den Ursprung zurückkehrt?

Nehmen wir an, der Ursprung $\mathbf{0}$ entspricht der Erde, die Beschleunigung sei $a = g \simeq 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ und der Stern sei α Centauri, so dass $L \simeq 4{,}3$ Lichtjahre gilt. Nehmen wir des Weiteren an, die Zwillinge sind zur Zeit $t = 0$ wohlrasiert und lassen ab der Trennung ihre Bärte wachsen (mit einer Wachstumsgeschwindigkeit von 2 cm/Monat, wobei Länge und Zeit in ihrem jeweiligen Ruhesystem gemessen werden).

(d) Wieviel länger ist der Bart des zurückgebliebenen Zwillings als derjenige seines Bruders bei dessen Rückkehr (gemessen im Inertialsystem K)?