



Aufgabe 20. Maxwell-Gleichungen in 4-Schreibweise (6 Punkte)

Zeigen Sie explizit, dass das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} zu einem 4-Vektor, dem 4-Potential $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$, kombiniert werden können:

- (a) Leiten Sie aus inhomogenen Maxwell-Gleichungen ab: $\frac{1}{\varepsilon_0 c} j^\mu = \square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu)$.
- (b) Welche Zusatzbedingung ist nötig, damit das 4-Potential A^μ sich wie ein 4-Vektor transformiert?
- (c) Warum muss man dabei nicht die homogenen Maxwell-Gleichungen berücksichtigen?

Aufgabe 21. Der Lorentz-Boost und elektromagnetische Felder (6 Punkte)

Wie aus der Vorlesung bekannt, kann der (antisymmetrische) elektromagnetische Feldstärketensor durch die elektromagnetischen Felder ausgedrückt werden: $F^{i0} = E_i$, $F^{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k$. Als echter Tensor wird er wie folgt transformiert:

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$$

Wir betrachten nun die explizite Form des Lorentz-Boosts:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & \mathbb{1}_3 + (\gamma - 1) \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie explizit das Transformationsverhalten der \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Felder unter dieser Lorentz-Transformation und leiten Sie folgende Ausdrücke ab:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1)(\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{E})\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - (\gamma - 1)(\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{B})\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

- (b) Zeigen Sie zusätzlich für die Komponenten:

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel & B'_\parallel &= B_\parallel \\ \mathbf{E}'_\perp &= \gamma \mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp & \mathbf{B}'_\perp &= \gamma \mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c} \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}_\perp \end{aligned}$$

Aufgabe 22. Relativistisches Teilchen im elektrischen Feld (8 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Ruhemasse m_0 und der Ladung q in einem räumlich homogenen, zeitunabhängigen elektrischen Feld \mathbf{E} . Der kinetische Impuls $\boldsymbol{\pi} = \gamma_u m_0 \mathbf{u}$ und die Energie $\mathcal{E} = \gamma_u m_0 c^2$ des Teilchens erfüllen die Bewegungsgleichungen $\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = q\mathbf{E}$ und $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}$. Lösen Sie diese Bewegungsgleichungen für eine allgemeine Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{u}(0) \equiv \mathbf{u}_0$ zur Zeit $t = 0$. Wir nehmen an, dass das Teilchen sich zur Zeit $t = 0$ im Ursprung befindet: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, und definieren $x_\parallel \equiv \mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, $\pi_{0\parallel} \equiv \boldsymbol{\pi}(0) \cdot \hat{\mathbf{E}}$, $\pi_{0\perp} = \boldsymbol{\pi}(0) - \pi_{0\parallel} \hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}_{0\perp} \equiv \pi_{0\perp} / |\pi_{0\perp}|$ und $x_\perp \equiv \mathbf{x} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}_{0\perp}$. Berechnen Sie $\mathbf{x}(t)$ und $\mathcal{E}(t)$ und zeigen Sie insbesondere für den Spezialfall $\pi_{0\parallel} = 0$:

$$x_\parallel(t) = \frac{m_0 c^2}{qE} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi_{0\perp}}{m_0 c}\right)^2} \left[\cosh\left(\frac{qEx_\perp}{|\pi_{0\perp}|c}\right) - 1 \right].$$

Vergleichen Sie die Bahnformen relativistischer und nicht-relativistischer Teilchen für diesen Spezialfall (mit Zeichnung!).