



Aufgabe 23. Die Grundleistung der Helmholtz-Gleichung (9 Punkte)

Die Grundleistung (oder Green'sche Funktion) der Helmholtz-Gleichung ist die Lösung der Gleichung

$$(\Delta + \lambda)U(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}) \quad (\lambda > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d), \quad (1)$$

wobei $\Delta = \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2}$ den d -dimensionalen Laplace-Operator bezeichnet.

Hier beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Fall ($d = 3$) und nehmen an, dass $U(\mathbf{x})$ die Randbedingung $U \rightarrow 0$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ erfüllt. Aufgrund der sphärischen Symmetrie des Problems beschränken wir uns des Weiteren auf Lösungen der Form $U(\mathbf{x}) = u(r)$ mit $r \equiv |\mathbf{x}|$.

(a) Leiten Sie aus (1) eine gewöhnliche Differentialgleichung für $u(r)$ her. Zeigen Sie, dass die Lösung die Form $u(r) = A \left[\frac{\cos(\sqrt{\lambda}r)}{r} + B \frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r} \right]$ hat.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass $A = \frac{1}{4\pi}$ gilt, während B beliebig ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' U(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\mu(\mathbf{x}') \quad (2)$$

eine Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung $(\Delta + \lambda)\Phi = -\mu(\mathbf{x})$ zu der Randbedingung $\Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ ist. Sie dürfen annehmen, dass $\mu(\mathbf{x})$ räumlich begrenzt ist.

(d) Erläutern Sie die Relevanz der Gleichungen (1) und (2) für die Bestimmung der Grundleistung $G(\mathbf{x}, t)$ der Wellengleichung, die durch $\square G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{t})$ definiert ist, bzw. für die Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\square G = \mu(\mathbf{x}, t)$.

Aufgabe 24. Die inhomogene Wellengleichung und Resonanz (11 Punkte)

Die Anwesenheit äußerer Kräfte führt zu *Inhomogenitäten* in der Wellengleichung, die wir in dieser Aufgabe durch eine Funktion $F(\mathbf{x}, t)$ beschreiben werden. Wir nehmen an, dass die Wellengleichung in einem offenen Gebiet \mathcal{D} gelöst werden soll und dass die Anfangswerte der Funktion u und ihrer Ableitung $\partial u / \partial t$ sowie der Wert von u auf dem Rand $\partial \mathcal{D}$ von \mathcal{D} vorgegeben sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \Delta u + F(\mathbf{x}, t) \\ u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}) ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{D}) \quad (3)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in \partial \mathcal{D}).$$

Dabei seien \mathcal{D} sternförmig sowie der Rand $\partial \mathcal{D}$ selbst und die darauf definierte Funktion $v(\mathbf{x}, t)$ hinreichend glatt.

(a) Zeigen Sie, dass man o. B. d. A. den vorgegebenen Randwert $v(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{x} \in \partial \mathcal{D}$) ersetzen kann durch $v(\mathbf{x}, t) = 0$, indem man die Funktionen u , F , f und g geeignet modifiziert. Im Folgenden werden wir annehmen, dass $v(\mathbf{x}, t) = 0$ gewählt wurde.

- (b) Man kann die gesuchte Lösung $u(\mathbf{x}, t)$ und die Inhomogenität $F(\mathbf{x}, t)$ nun entwickeln nach den Eigenfunktionen $X_n(\mathbf{x})$ des Laplace-Operators auf \mathcal{D} , die die vorgegebene Randbedingung erfüllen (d. h. $X_n(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}$):

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) X_n(\mathbf{x}) \quad ; \quad U_n(t) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} u(\mathbf{x}, t) X_n(\mathbf{x})$$

$$F(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(\mathbf{x}) \quad ; \quad F_n(t) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x} F(\mathbf{x}, t) X_n(\mathbf{x}) .$$

Sei nun der zu X_n gehörende Eigenwert gegeben durch λ_n . Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten $U_n(t)$ folgenden Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen:

$$\frac{d^2 U_n(t)}{dt^2} + c^2 \lambda_n U_n(t) = F_n(t).$$

Geben Sie auch die Anfangsbedingungen $U_n(0)$, $\frac{dU_n}{dt}(0)$ der Entwicklungskoeffizienten an.

- (c) Es gibt hierbei einen interessanten Spezialfall, der auftritt, wenn für irgendeine Mode (z. B. für $n = m$) die Zeitabhängigkeit der Quelle $F_m(t)$ genau der Eigenfrequenz $\sqrt{\lambda_m}$ entspricht: $F_m(t) = K \cos(\sqrt{\lambda_m} ct)$, wobei K eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$U_m(t) = A_m \cos(\sqrt{\lambda_m} ct) + B_m \sin(\sqrt{\lambda_m} ct) + C_m t \sin(\sqrt{\lambda_m} ct)$$

gilt, so dass $U_m(t)$ divergiert für $t \rightarrow \infty$ und folglich die in der m -ten Mode gespeicherte Energie unbegrenzt anwächst. Man spricht von „Resonanz“. Drücken Sie die Konstanten A_m , B_m und C_m durch die Anfangsbedingungen aus.