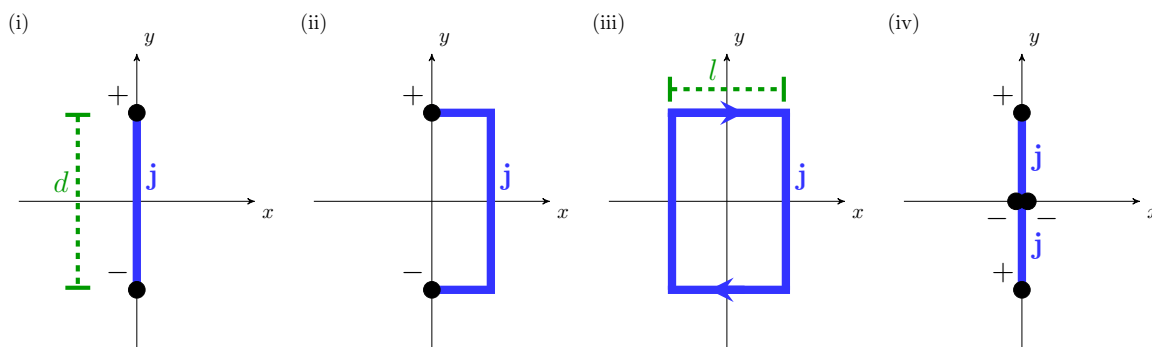


Aufgabe 25. Poynting-Vektor (4 Punkte)

Ein unendlich langer, leitender Zylinder, mit dem Radius R und der spezifischen Leitfähigkeit σ , befinde sich in einem homogenen achsenparallelen elektrischen Feld \mathbf{E} und werde daher von der Stromdichte $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ durchflossen.

- Berechnen Sie das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$.
- Wie lautet der Poynting-Vektor für $r > R$? Berechnen Sie den Energiefluss pro Länge durch einen den Zylinder umgebenden konzentrischen Zylindermantel vom Radius $r > R$. Warum hängt der Fluss nicht von r ab? In welche Richtung fließt die Energie?
- Berechnen Sie die pro Zeit- und Längeneinheit im Zylinder freigesetzte Joule'sche Wärme.

Aufgabe 26. Strahlungsfelder lokalisierter oszillierender Quellen (9 Punkte)



Wie aus der Vorlesung bekannt, lässt sich das Strahlungsfeld lokalisierter Ladungs- und Stromverteilungen bei großen Abständen anhand des komplexen Vektorpotentials

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) \approx \frac{\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \left[-i\omega \mathbf{d} - ik\hat{\mathbf{x}} \left(D - \frac{i\omega}{3} \tilde{Q} \right) + \dots \right] \quad (1)$$

charakterisieren.

- Geben Sie für die oben illustrierten physikalischen Konfigurationen (jeweils mit Oszillationsfrequenz ω)
 - Dipol der Länge d mit Stromfluß entlang der y -Achse und Ladung $q(t) = \pm q_0 \cos(\omega t)$ für $y = \pm d/2$,
 - Dipol in Hufeisenform, d.h. mit Stromfluss entlang einer rechteckigen Kontur mit Ausdehnung $l/2$ jeweils in x -Richtung und d in y -Richtung,
 - Strom in einer rechteckigen Leiterschleife (Seitenlängen l und d),
 - Kombination zweier Dipole (mit Ladung $-2q_0 \cos(\omega t)$ im Ursprung) analog zu Aufgabenteil (i),

(wobei die Ladungen jeweils punktförmig und die Leiterschleifen unendlich dünn sind) jeweils die Ladungs- und Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ und $\rho(\mathbf{x}, t)$ (mithilfe der komplexen Größen $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ und $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$) explizit an und diskutieren Sie die Ladungserhaltung.

- (b) Berechnen Sie jeweils die zu $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ beitragenden Momente \mathbf{d} , D , und \tilde{Q} zu $\mathcal{A}(\mathbf{x})$.
- (c) Diskutieren Sie für (i), (ii) und (iv) den Grenzübergang $d \rightarrow 0$ mit $q_0 d$ konstant. Wie ließe sich ein analoger Grenzübergang im Fall (iii) durchführen?

Aufgabe 27. Wirkungsfunktional des elektromagnetischen Feldes (7 Punkte)

Das Wirkungsfunktional des elektromagnetischen Feldes in Anwesenheit von Ladungen und Strömen $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$, deren Zeitabhängigkeit vorgegeben ist, lautet

$$S[A] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x} \mathcal{L} \quad , \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu \quad , \quad A^\mu = (\Phi, c\mathbf{A}) \quad ,$$

wobei \mathcal{L} die Lagrange-Dichte und $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ den elektromagnetischen Feldtensor darstellt.

- (a) Unter welcher Bedingung an der 4-Stromdichte j^μ ist die Wirkung (evtl. bis auf eine wirkungslose Konstante) eichinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Leiten Sie aus der Euler-Lagrange-Gleichung $0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\rho} - \partial^\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\sigma A^\rho)}$ die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form her.

Wir betrachten im Folgenden nur den Spezialfall des *freien* elektromagnetischen Feldes ($j^\mu = 0$); die Energiedichte dieses Feldes ist bekanntlich durch $\rho_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2)$ gegeben.

- (c) Zeigen Sie für diesen Spezialfall, dass die Lagrange-Dichte alternativ auch als $\mathcal{L}_F = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2)$ geschrieben werden kann.
- (d) Berechnen Sie die Hamilton-Dichte \mathcal{H}_F , die mittels der Legendre-Transformation

$$\mathcal{H}_F \equiv \sum_{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial(\partial^0 A^\rho)} \partial^0 A^\rho - \mathcal{L}_F \quad , \quad \mathcal{L}_F = -\frac{1}{4}\varepsilon_0 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

mit der Lagrange-Dichte \mathcal{L}_F verknüpft ist, und zeigen Sie, dass \mathcal{H}_F *nicht* gleich der Energiedichte ist: $\mathcal{H}_F - \rho_{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 \nabla \cdot (\Phi \mathbf{E})$. Folgt hieraus auch, dass die Hamilton-Funktion $H_F \equiv \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_F$ nicht gleich der Gesamtenergie des Feldes ist? Begründen Sie Ihre Antwort.