



Aufgabe 28. Poynting-Vektor und komplexe Feldnotation (5 Punkte)

Gegeben seien zwei Vektorfelder $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ und $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$, wobei \mathbf{a}_0 und \mathbf{b}_0 komplex sind. Die zugehörigen physikalischen Felder sind dann $\Re\{\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)\}$ und $\Re\{\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die zeitlich über eine Periode gemittelten Produkte der physikalischen Felder durch

$$\langle \Re\{\mathbf{a}\} \cdot \Re\{\mathbf{b}\} \rangle_T = \frac{1}{2} \Re\{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0^*\} \quad \text{und} \quad \langle \Re\{\mathbf{a}\} \times \Re\{\mathbf{b}\} \rangle_T = \frac{1}{2} \Re\{\mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0^*\} \quad (1)$$

$$\text{wobei} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad , \quad \langle x(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T dt x(t)$$

bestimmt werden können.

Betrachten Sie nun ein oszillierendes elektromagnetisches Feld $\Re\{\mathbf{E}\}$, $\Re\{\mathbf{B}\}$ mit $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$.

- (b) Zeigen Sie, dass der Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \Re\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\} \times \Re\{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\}$ und die Energiedichte $\rho_\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c^2} |\Re\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\}|^2 + |\Re\{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\}|^2 \right)$ eine Kontinuitätsgleichung erfüllen. Drücken Sie den zeitlichen Mittelwert des Poynting-Vektors durch die komplexen Felder $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ und $\mathcal{B}(\mathbf{r})$ aus.
- (c) Ist der Poynting-Vektor ein echter oder ein Pseudovektor?

Aufgabe 29. Das relativistische Coulomb-Problem (15 Punkte)

Betrachten Sie ein relativistisches geladenes Teilchen (Ruhemasse m_0 , Ladung q), das sich im Coulomb-Feld einer unbeweglichen Ladung Q befindet. Die Lagrange-Funktion des Teilchens lautet:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}\right)^2} + \frac{a}{x} \quad , \quad a \equiv -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} .$$

Wir definieren den Parameter $\bar{a} \equiv \frac{a}{|\mathbf{L}|c}$, wobei \mathbf{L} den (erhaltenen) Drehimpuls des Teilchens darstellt. In der Vorlesung wurde die Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichung für den Fall attraktiver Coulomb-Wechselwirkung ($\bar{a} > 0$) diskutiert. Man findet, dass das Teilchen für Parameterwerte $\bar{a} \geq 1$ in das Anziehungszentrum hinabstürzt, falls für die Gesamtenergie \mathcal{E}_g des Teilchens entweder $\mathcal{E}_g < m_0 c^2$ oder $\mathcal{E}_g \geq m_0 c^2$ und zusätzlich $\dot{x}(0) < 0$ gilt.

- (a) Zeigen Sie, dass die Zeit, die das geladene Teilchen für $\bar{a} \geq 1$ benötigt, um in den Kern hinabzustürzen, endlich ist.
- (b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen nun für den Fall *repulsiver* Coulomb-Wechselwirkung ($\bar{a} < 0$). Bestimmen Sie insbesondere den Ablenkungswinkel eines Teilchens, das aus dem Unendlichen eintrifft und an der abstoßenden Ladung Q gestreut wird.